

CAPITOLE SPECIALE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ PENTRU PREGĂTIREA PROFESORILOR

Liviu C. FLORESCU *

* Universitatea “Al.I.Cuza”,
Facultatea de Matematică,
Bd. Carol I, 11,
R-700506 Iași, ROMANIA,
e-mail: lflo@uaic.ro

Această pagină este lăsată intenționat albă !!!

Cuprins

Introducere	5
1 Corpul numerelor reale	7
1.1 Corpuri normate	8
Corpuri ne-arhimedienne	11
Clasificarea normelor pe $\mathbb{Q}$	14
1.2 Corpul numerelor p -adice	16
Completarea unui corp normat	16
Numerele întregi p -adice	19
Bibliografie	28
2 Recurențe liniare și neliniare	29
2.1 Ecuații liniare cu diferențe	29
Ecuații liniare omogene	31
Ecuații omogene cu coeficienți constanți	36
Ecuații liniare neomogene	43
2.2 Media aritmetico-geometrică	49
Demonstrația lui Gauss	53
Demonstrația lui Legendre	57
2.3 Integrale eliptice; formula lui Legendre	61
2.4 Perimetrul lemniscatei și al elipsei	65
Perimetrul lemniscatei	65
Perimetrul elipsei	69
Bibliografie	71
3 Elemente de analiză asimptotică	73
3.1 Șiruri și serii asimptotice	74

Simbolul O	74
Simbolul o	77
Serii asimptotice	79
Operații cu serii asimptotice	86
3.2 Metoda lui Laplace pentru studiul comportării asimptotice a integralelor generalizate	91
Integrale de tipul $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx$	96
Integrale de tipul $\int_0^{+\infty} e^{-tx} x^\lambda g(x) dx$	99
Integrale de tipul $\int_\alpha^\beta e^{-tx^2} h(x) dx$	104
3.3 Formula lui Stirling	105
Bibliografie	107
4 Algoritmi de integrare utilizați în tehnica de calcul	109
4.1 Extinderi de corpuri	110
Corpuri Liouville	113
4.2 Principiul Laplace-Liouville	118
4.3 Cazuri particulare	120
Integrarea expresiilor de forma $A_0 w + A_1$	121
Integrarea unui polinom în w	128
Bibliografie	134

Introdúcere

Capitolul 1

Corpul numerelor reale

Corpul numerelor reale este un corp comutativ total ordonat $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ în care orice mulțime nevidă și mărginită superior are margine superioară. Pe acest corp putem să definim norma modul cu ajutorul relației de ordine: $\text{mod} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definită prin

$$\text{mod}(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Această normă este compatibilă cu structura de corp a lui $\mathbb{R}$, adică îndeplinește proprietățile:

- 1). $\text{mod}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- 2). $\text{mod}(x + y) \leq \text{mod}(x) + \text{mod}(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 3). $\text{mod}(x \cdot y) = \text{mod}(x) \cdot \text{mod}(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$,

Știm că $(\mathbb{R}, \text{mod})$ este un spațiu normat complet. Acest spațiu este completat al subcorpului numerelor raționale $\mathbb{Q}$ (rezultatul este consecință a modelului lui Cantor, model în care construiește $\mathbb{R}$ ca și completat al lui $\mathbb{Q}$). Ne putem pune întrebarea dacă pe $\mathbb{Q}$ mai există și alte norme de corp și, în cazul unui răspuns afirmativ, ce se obține prin completarea lui $\mathbb{Q}$ în raport cu astfel de norme.

În acest capitol vom determina și vom clasifica toate normele de corp pe mulțimea numerelor raționale. Vom demonstra teorema de clasificare a lui Ostrowski care afirmă că singura normă arhimediană de corp pe $\mathbb{Q}$ este norma modul și drept norme ne-arhimediene putem găsi norma trivială și normele p -adice. În al doilea paragraf al capitolului vom construi modelul ne-arhimedian al mulțimii numerelor reale prin completarea lui $\mathbb{Q}$ în raport cu o normă p -adică.

1.1 Corpuri normate

Vom începe acest paragraf cu câteva rezultate generale despre corpurile normate.

1.1.1 Definiție. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ; vom nota cu $\underline{0}$ și respectiv $\underline{1}$ elementele neutre ale lui K în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire. În cele ce urmează 0 și 1 vor nota elementele neutre de la adunare și de la înmulțire respectiv pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$.

O **normă de corp** pe K este o aplicație $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}_+$ care verifică proprietățile următoare de compatibilitate cu structura de corp:

- 1). $|x| = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}$,
- 2). $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in K$,
- 3). $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in K$.

Perechea ordonată $(K, |\cdot|)$ formată dintr-un corp comutativ K și o normă de corp $|\cdot|$ pe K se numește **corp normat**.

1.1.2 Observații. (i). Prezintă câteva consecințe imediate ale definiției de mai sus, lăsând demonstrațiile pe seama cititorilor.

1. $|-x| = |x|, \forall x \in K$,
2. $|x^{-1}| = \frac{1}{|x|}, \forall x \in K \setminus \{\underline{0}\}$,
3. $|\underline{1}| = 1$.

(ii). Nu trebuie confundată noțiunea de normă de corp cu aceea de normă pe un spațiu vectorial. Proprietățile 1). și 2). din definiția de mai sus sunt comune însă proprietatea a treia diferențiază net cele două noțiuni, așa cum vom putea observa din cele ce urmează. Totuși, ca și normele pe spații vectoriale, normele de corp permit construcția unor metrici.

1.1.3 Definiție. Fie $(K, |\cdot|)$ un corp normat; aplicația $d_{|\cdot|} : K \times K \rightarrow \mathbb{R}_+$ definită prin $d_{|\cdot|}(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in K$ este o metrică pe K ; $d_{|\cdot|}$ se va numi **metrica indusă** de norma $|\cdot|$ iar topologia indusă de această metrică, $\tau_{d_{|\cdot|}}$ se va nota cu $\tau_{|\cdot|}$ și se va numi **topologia indusă** de norma de corp $|\cdot|$.

1.1.4 Definiție. Fie K un corp comutativ; două norme de corp pe K , $|\cdot|_1$ și $|\cdot|_2$, se numesc **norme echivalente** dacă topologiile induse de cele două norme coincid: $\tau_{|\cdot|_1} = \tau_{|\cdot|_2}$; vom nota această situație cu $|\cdot|_1 \sim |\cdot|_2$.

O primă diferență între normele de spații vectoriale și cele de corpuri o putem remarca din teorema următoare în care se caracterizează normele de corp echivalente.

1.1.5 Teoremă. *Fie $|\cdot|_1$ și $|\cdot|_2$ două norme de corp pe K ; următoarele afirmații sunt echivalente:*

- 1). $|\cdot|_1 \sim |\cdot|_2$,
- 2). $|x|_1 < 1 \Leftrightarrow |x|_2 < 1$,
- 3). $\exists \alpha > 0$ așa fel încât $|x|_1 = |x|_2^\alpha, \forall x \in K$.

⊖ Demonstrație. $[1) \Rightarrow 2)]$: Presupunem că $|\cdot|_1 \sim |\cdot|_2$ și fie $x \in K$; șirul $(x^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent în raport cu topologia $\tau_{|\cdot|_1} \equiv \tau_1$ la $\underline{0}$ dacă și numai dacă $|x|_1^n \rightarrow 0$ ceea ce este echivalent cu a spune că $|x|_1 < 1$. Deoarece $\tau_1 = \tau_2 \equiv \tau_{|\cdot|_2}$, rezultă că:

$$\begin{aligned} \{x \in K : |x|_1 < 1\} &= \{x \in K : x^n \xrightarrow{\tau_1} \underline{0}\} = \\ &= \{x \in K : x^n \xrightarrow{\tau_2} \underline{0}\} = \{x \in K : |x|_2 < 1\} \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația acestei implicații.

$[2) \Rightarrow 3)]$: a). Dacă $\forall x \in K^* = K \setminus \{0\}, |x|_1 = 1$, atunci avem și $|x|_2 = 1, \forall x \in K^*$ și deci 3). este verificată cu orice $\alpha > 0$. Într-adevăr, dacă ar exista un $x \in K^*$ a.î. $|x|_2 \neq 1$ atunci sau $|x|_2 < 1$ și deci, din 2), $|x|_1 < 1$, ceea ce este absurd, sau $|x|_2 > 1$ deci $|x^{-1}|_2 < 1$ și deci $|x^{-1}|_1 < 1$, ceea ce este iarăși absurd.

b). Să presupunem acum că $\exists a \in K^*$ a.î. $|a|_1 \neq 1$. Putem presupune fără să restrângem generalitatea că $|a|_1 > 1$.

$$\forall x \in K^*, \exists \beta = \frac{\ln |x|_1}{\ln |a|_1} \text{ a.î. } |x|_1 = |a|_1^\beta.$$

Acum, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ cu $\frac{n}{m} > \beta, |x|_1 < |a|_1^{\frac{n}{m}}$ sau, echivalent, $\left| \frac{x^m}{a^n} \right|_1 < 1$; rezultă atunci din 2) că $\left| \frac{x^m}{a^n} \right|_2 < 1$ sau echivalent $|x|_2 < |a|_2^{\frac{n}{m}}$. Cum $\frac{n}{m}$ este un număr rațional arbitrar mai mare decât β rezultă că $|x|_2 \leq |a|_2^\beta$.

Raționăm similar pentru numere raționale mai mici decât β și obținem și inegalitatea inversă și deci $|x|_2 = |a|_2^\beta$. Atunci $\beta = \frac{\ln |x|_2}{\ln |a|_2}$ și deci

$$\frac{\ln |x|_2}{\ln |a|_2} = \frac{\ln |x|_1}{\ln |a|_1}.$$

Deci $|x|_2 = |x|_1^\alpha$ unde $\alpha = \frac{\ln |a|_2}{\ln |a|_1}$.

3) $\implies$ 1): Un șir $(x_n)_n \subseteq K$ este convergent în raport cu $|\cdot|_1$ la $x \in K$ dacă și numai dacă $|x_n - x|_1 = |x_n - x|_2^\alpha \rightarrow 0$ și deci dacă și numai dacă $(x_n)_n$ este convergent la x în raport cu norma $|\cdot|_2$. Topologiile generate de cele două norme au aceleași șiruri convergente și deci coincid. ■

1.1.6 Corolar. Dacă normele de corp $|\cdot|_1$ și $|\cdot|_2$ pe K sunt echivalente atunci: $|x|_1 = 1 \Leftrightarrow |x|_2 = 1$.

1.1.7 Observație. Remarcăm că, dacă două norme de corp sunt echivalente, sferile cu centrul în origine de rază 1 au aceeași “coajă”. Normele de spații vectoriale nu au această proprietate geometrică. Ne reamintim de exemplu că pe $\mathbb{R}^2$ norma euclidiană $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ și norma $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sunt echivalente. Însă, în timp ce “coaia” sferei unitate pentru prima este un cerc cu centrul în origine, “coaia” sferei unitate pentru a doua este un pătrat cu centrul în origine și cu laturile paralele cu cele două bisectoare.

1.1.8 Definiție. Fie K un corp comutativ și fie K_0 intersecția tuturor sub-corpurilor lui K ; K_0 se numește **corpul prim** al corpului K .

Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*, k \cdot \underline{1} = \underbrace{\underline{1} + \dots + \underline{1}}_{k\text{-ori}}$ iar $0 \cdot \underline{1} = \underline{0}$; dacă $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ atunci $k \cdot \underline{1} = -(-k \cdot \underline{1})$. Evident, $\{k \cdot \underline{1} : k \in \mathbb{Z}\} \subseteq K_0$. Aplicația $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow K_0$, definită prin $\varphi(k) = k \cdot \underline{1}, \forall k \in \mathbb{Z}$, este un homomorfism de inele. Deoarece K este corp, subinelul $\varphi(\mathbb{Z}) \subseteq K_0$ nu are divizori ai lui $\underline{0}$ și astfel nucleul homomorfismului φ , $\ker \varphi = \{k \in \mathbb{Z} : k \cdot \underline{1} = \underline{0}\}$ este un ideal prim în $\mathbb{Z}$ ($\ker \varphi = \text{ideal} : \forall l \in \mathbb{Z}, \forall k \in \ker \varphi, l \cdot k \in \ker \varphi$; $\ker \varphi = \text{ideal prim} : \forall k, l \in \mathbb{Z}$ cu $k \cdot l \in \ker \varphi$ sau $k \in \ker \varphi$ sau $l \in \ker \varphi$). Avem două situații posibile:

I. Dacă $\ker \varphi = \{0\}$ atunci φ este injecție și deci un izomorfism de inele între $\mathbb{Z}$ și $\varphi(\mathbb{Z})$. Atunci corpul prim K_0 conține un inel izomorf cu $\mathbb{Z}$ și deci K_0 conține un corp izomorf cu $\mathbb{Q}$. Cum K_0 este cel mai mic sub-corp al lui K , $K_0 \equiv \mathbb{Q}$.

II. Dacă $\ker \varphi \neq \{0\}$ atunci există un $n \in \mathbb{Z}^*$ a.i. $n \cdot \underline{1} = \underline{0}$; fie $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ descompunerea unică a lui n în factori primi. Deoarece $\ker \varphi$ este ideal prim, există un număr prim p a.i. $p \cdot \underline{1} = \underline{0}$. Pentru orice alt număr prim q diferit de p există $m, n \in \mathbb{Z}$ a.i. $m \cdot p + n \cdot q = 1$. Atunci $(m \cdot p + n \cdot q) \cdot \underline{1} = \underline{1}$ de unde $n \cdot q \neq \underline{0}$. Astfel p este unicul număr prim care se găsește în $\ker \varphi$. Rezultă atunci că $\ker \varphi = p \cdot \mathbb{Z}$ de unde $K_0 \equiv \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Concluzia acestei analize o fixăm în următorul corolar.

1.1.9 Corolar. *Corpul prim al unui corp comutativ este sau corpul numerelor raționale sau un corp de clase de resturi modulo un număr prim.*

Corpuri ne-arhimedienne

1.1.10 Definiție. O normă $|\cdot|$ pe un corp K se numește **normă ne-arhimediană** sau **ultrametrică** dacă verifică condițiile 1) și 3) din definiția 1.1.1, dar, în locul condiției 2), verifică condiția mai tare:

$$2'). |x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}, \forall x, y \in K.$$

Dacă $|\cdot|$ este o normă ne-arhimediană pe corpul K atunci spunem că $(K, |\cdot|)$ este un **corp ne-arhimedian** sau **ultrametric**.

O normă de corp $|\cdot|$ pe K care nu este ne-arhimediană se numește **normă arhimediană** iar $(K, |\cdot|)$ se numește **corp arhimedian**. Astfel o normă $|\cdot|$ pe K este arhimediană dacă verifică condițiile 1), 2) și 3) din definiția 1.1.1 și există două elemente $x, y \in K$ pentru care:

$$|x + y| > \max\{|x|, |y|\}.$$

1.1.11 Exemple. (i) Fie K un corp comutativ arbitrar; definim $|\cdot|_0 : K \rightarrow \mathbb{R}_+$ prin

$$|x|_0 = \begin{cases} 0, & x = \underline{0} \\ 1, & x \in K \setminus \{\underline{0}\} \end{cases}, \forall x \in K.$$

Atunci $|\cdot|_0$ este o normă ne-arhimediană pe K .

Această normă se numește **norma trivială** pe K .

(ii) Fie p un număr prim; $\forall x \in \mathbb{Q}^*$ există un unic $n \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = p^n \cdot \frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}^*$ sunt două numere prime cu p . Definim atunci

$$|x|_p = \frac{1}{p^n} = p^{-n} \text{ și } |0|_p = 0.$$

Aplicația $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o normă ne-arhimedeană pe $\mathbb{Q}$.

Într-adevăr, condiția 1) din definiția 1.1.1 este evident îndeplinită; fie acum un alt element $y = p^m \cdot \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}^*$ unde $c, d \in \mathbb{Z}^*$ sunt prime cu p .

Presupunem că $n < m$; atunci $x + y = p^n \frac{ad + p^{m-n}bc}{bd}$. Deoarece $ad + p^{m-n}bc$ și bd sunt prime cu p ,

$$|x + y|_p = \frac{1}{p^n} = \max \left\{ \frac{1}{p^n}, \frac{1}{p^m} \right\} = \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Dacă $n > m$ se raționează similar.

Dacă $n = m$ atunci $x + y = p^n \frac{ad + bc}{bd}$; atunci există $l \geq n$ a.î. $x + y = p^l \frac{e}{bd}$ unde e și bd sunt prime cu p . Rezultă că

$$|x + y|_p = p^{-l} \leq p^{-n} = \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

În sfârșit să verificăm condiția 3) a definiției 1.1.1; $x \cdot y = p^{m+n} \frac{ac}{bd}$ și, cum ac și bd sunt prime cu p ,

$$|x \cdot y|_p = \frac{1}{p^{m+n}} = |x|_p \cdot |y|_p.$$

Normele $|\cdot|_p$ se numesc **norme p -adice** pe $\mathbb{Q}$.

(iii) Norma modul pe $\mathbb{R}$ este o normă arhimedeană de corp.

1.1.12 Observație. Folosind proprietățile 1. și 3. date în cadrul punctului

(i) al observației 1.1.2, rezultă că, într-un corp ne-arhimedean $(K, |\cdot|)$,

$$|k \cdot 1| \leq 1, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Vom arăta, în teorema următoare, că această proprietate caracterizează normele ne-arhimedee pe un corp.

1.1.13 Teoremă. *Un corp normat $(K, |\cdot|)$ este ne-arhimedean dacă și numai dacă $|n \cdot \underline{1}| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Demonstrație. Necesitatea condiției a fost deja anunțată în observația precedentă. Într-adevăr, dacă norma $|\cdot|$ este ne-arhimedeană atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $|n \cdot \underline{1}| = |\underbrace{\underline{1} + \dots + \underline{1}}_{n \text{ ori}}| \leq \max\{|\underline{1}|, \dots, |\underline{1}|\} = 1$.

Să presupunem acum că $|n \cdot \underline{1}| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}; \forall x, y \in K, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |x + y|^n &= |(x + y)^n| = |x^n + C_n^1 \cdot x^{n-1} \cdot y + \dots + C_n^n \cdot y^n| \leq \\ &\leq |x|^n + |C_n^1 \cdot \underline{1}| \cdot |x|^{n-1} \cdot |y| + \dots + |C_n^n \cdot \underline{1}| \cdot |y|^n \leq |x|^n + |x|^{n-1} \cdot |y| + \dots + |y|^n \leq \\ &\leq (n + 1) \cdot \max\{|x|, |y|\}^n, \end{aligned}$$

de unde

$$|x + y| \leq (n + 1)^{\frac{1}{n}} \cdot \max\{|x|, |y|\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dacă în relația de mai sus facem $n \rightarrow +\infty$ obținem:

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}, \forall x, y \in K.$$

Aceasta arată că norma $|\cdot|$ este ne-arhimedeană. ■

1.1.14 Corolar. *$(K, |\cdot|)$ este corp arhimedean dacă și numai dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ așa fel încât $|n_0 \cdot \underline{1}| > 1$.*

1.1.15 Observații. (i) Cu notațiile din corolarul precedent, observăm că $|n_0^p \cdot \underline{1}| = |(n_0 \cdot \underline{1})^p| = |n_0 \cdot \underline{1}|^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} +\infty$. Rezultă că un corp normat $(K, |\cdot|)$ este arhimedean dacă și numai dacă mulțimea $\mathbb{N} \cdot \underline{1} = \{n \cdot \underline{1} : n \in \mathbb{N}\}$ (“numerele naturale” ale lui K) este nemărginită superior în normă.

(ii) Dacă corpul prim al lui K este un corp de clase de resturi modulo numărul prim p (vezi corolarul 1.1.9) atunci orice normă de corp pe K este ne-arhimedeană.

Într-adevăr, în acest caz, $\mathbb{N} \cdot \underline{1} = \{n \cdot \underline{1} : n \in \mathbb{N}\} = \{\underline{0}, \underline{1}, \dots, (p-1) \cdot \underline{1}\}$ este o mulțime finită și astfel nu poate fi nemărginită în nici-o normă $|\cdot|$ pe K . Observația de mai sus ne asigură că $|\cdot|$ este ne-arhimedeană.

Clasificarea normelor pe $\mathbb{Q}$

Teorema următoare dă o caracterizare completă a normelor de corp pe $\mathbb{Q}$.

1.1.16 Teoremă (teorema lui Ostrowski).

a). Dacă $|\cdot|$ este o normă arhimediană pe $\mathbb{Q}$ atunci există $\alpha \in (0, 1]$ a.î.

$$|x| = (\text{mod}(x))^\alpha, \forall x \in \mathbb{Q}.$$

b). Dacă $|\cdot|$ este o normă ne-arhimediană pe $\mathbb{Q}$ atunci sau $|\cdot|$ este norma trivială sau există $\alpha > 0$ și un număr prim p așa fel încât

$$|x| = |x|_p^\alpha, \forall x \in K.$$

⊗ **Demonstrație.** În enunțul teoremei “mod” este norma modul pe $\mathbb{Q}$ definită în introducerea acestui capitol, $|\cdot|_p$ este norma p -adică pe $\mathbb{Q}$ definită în exemplul 1.1.11, (ii) iar norma trivială este definită în 1.1.11, (i).

a). Fie $|\cdot|$ o normă arhimediană pe $\mathbb{Q}$. Pentru orice $x \in \mathbb{N}$,

$$(1) \quad |x \cdot \underline{1}| = |x \cdot 1| = |x| = \underbrace{|1 + \cdots + 1|}_{x \text{ ori}} \leq \underbrace{|1| + \cdots + |1|}_{x \text{ ori}} = x.$$

Conform corolarului 1.1.14 există $a \in \mathbb{N}$ a.î. $|a| > 1$; evident că $a \geq 2$. Atunci din (1), $|a| \leq a$, de unde, dacă notăm cu $\alpha = \frac{\ln |a|}{\ln a} \in (0, 1]$, rezultă

$$(2) \quad |a| = a^\alpha.$$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $k \in \mathbb{N}^*$ așa fel încât $a^{k-1} \leq n < a^k$; atunci numărul n admite o scriere în baza a de forma $n = x_0 + x_1 a + \cdots + x_{k-1} a^{k-1}$, unde, $\forall i = 0, \dots, k-1, 0 \leq x_i \leq a-1$ și $x_{k-1} \geq 1$. Din (1) și (2) rezultă că

$$\begin{aligned} |n| &\leq |x_0| + |x_1| \cdot |a| + \cdots + |x_{k-1}| \cdot |a|^{k-1} \leq x_0 + x_1 a^\alpha + \cdots + x_{k-1} a^{\alpha(k-1)} \leq \\ &\leq (a-1) \cdot (1 + a^\alpha + \cdots + a^{\alpha(k-1)}) = (a-1) \cdot \frac{a^{k\alpha} - 1}{a^\alpha - 1} < \\ &< (a-1) \cdot \frac{a^{k\alpha}}{a^\alpha - 1} = \frac{(a-1) \cdot a^\alpha}{a^\alpha - 1} \cdot a^{(k-1)\alpha} \leq \frac{(a-1) \cdot a^\alpha}{a^\alpha - 1} \cdot n^\alpha = A \cdot n^\alpha. \end{aligned}$$

Deci

$$(3) \quad |n| \leq A \cdot n^\alpha, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Înlocuind în (3) pe n cu n^m obținem $|n^m| = |n|^m \leq A \cdot n^{m\alpha}$, de unde

$$(4) \quad |n| \leq \sqrt[m]{A} \cdot n^\alpha, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Dacă în (4) $m \rightarrow +\infty$,

$$(5) \quad |n| \leq n^\alpha, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fie acum $b \in \mathbb{N}$, $0 < b \leq a^k - a^{k-1}$ a.î. $n = a^k - b$. Din (2) obținem

$$(6) \quad |n| \geq |a^k| - |b| = a^{k\alpha} - |b|$$

și din (5)

$$(7) \quad |b| \leq b^\alpha \leq (a^k - a^{k-1})^\alpha.$$

În sfârșit (6) și (7) ne conduc la

$$|n| \geq a^{k\alpha} - (a^k - a^{k-1})^\alpha = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right)^\alpha\right] \cdot a^{k\alpha} = B \cdot a^{k\alpha}$$

sau

$$(8) \quad |n| > B \cdot n^\alpha.$$

Din (8), trecând iar n în n^m , obținem $|n|^m > B \cdot n^{m\alpha}$ sau

$$(9) \quad |n| \geq \sqrt[m]{B} \cdot n^\alpha.$$

Dacă în (9) $m \rightarrow +\infty$ ajungem la

$$(10) \quad |n| \geq n^\alpha, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(5) și (10) conduc la

$$(11) \quad |n| = n^\alpha = (\text{mod}(n))^\alpha, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Din (11), $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$,

$$(12) \quad |k| = |-k| = (\text{mod}(-k))^\alpha = (\text{mod}(k))^\alpha.$$

Acum, utilizând (12), $\forall x = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ (unde $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$),

$$|x| = |k \cdot n^{-1}| = |k| \cdot \frac{1}{|n|} = \frac{(\text{mod}(k))^\alpha}{(\text{mod}(n))^\alpha} = \left(\text{mod} \left(\frac{k}{n} \right) \right)^\alpha = (\text{mod}(x))^\alpha.$$

b). Fie $|\cdot|$ o normă ne-arhimeidiană și netrivială; din teorema 1.1.13, $|n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Dacă am presupune că $|n| = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci, $\forall x \in \mathbb{Q}^*, |x| = 1$ ceea ce ar însemna că norma $|\cdot|$ este norma trivială.

Există deci $n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $0 < |n_0| < 1$. Utilizând descompunerea lui n_0 în factori primi deducem că există un număr prim p , a.î. $0 < |p| < 1$. Fie $\alpha = -\frac{\ln |p|}{\ln p} > 0$; atunci

$$(13) \quad |p| = p^{-\alpha}.$$

Oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}^*$, n nedivizibil cu p , există $q, s \in \mathbb{Z}$ a.î. $q \cdot n + s \cdot p = 1$. Dacă presupunem că $|n| < 1$, cum $|q| \leq 1$ și $|s| \leq 1$ rezultă că

$$|1| = |q \cdot n + s \cdot p| \leq \max\{|q||n|, |s||p|\} < 1$$

ceea ce este absurd.

Deci orice număr $n \in \mathbb{Z}^*$ prim cu p are norma 1. Fie atunci $x = p^k \cdot \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, unde m și n sunt prime cu p ; rezultă din (13) că

$$|x| = |p|^k = p^{-k\alpha} = |x|_p^\alpha.$$

■

1.1.17 Observație. Ținând cont de teorema 1.1.5, teorema lui Ostrowski se poate reformula:

- a). Orice normă arhimeidiană pe $\mathbb{Q}$ este echivalentă cu norma modul.
- b). Orice normă ne-arhimeidiană pe $\mathbb{Q}$ este sau norma trivială sau este echivalentă cu o normă p -adică.

1.2 Corpul numerelor p -adice

Completarea unui corp normat

Vom începe acest paragraf cu o teoremă de completare a corpurilor normate. Așa cum am menționat în definiția 1.1.3, pe orice corp normat $(K, |\cdot|)$ se

poate defini o metrică prin $d_{|\cdot|}(x, y) = |x - y|$. Dacă spațiul metric $(K, d_{|\cdot|})$ este complet vom spune că $(K, |\cdot|)$ este un corp normat complet. Dacă nu, dintr-un rezultat de completare a spațiilor metrice (teorema lui Hausdorff), spațiul metric $(K, d_{|\cdot|})$ admite un completat unic până la o izometrie; teorema următoare arată că, în cazul corpurilor normate, completatul este de asemenea un corp normat iar izometria de mai sus este și izomorfism de corpuri.

1.2.1 Teoremă. *Pentru orice corp normat $(K, |\cdot|)$ există un corp normat complet $(\widehat{K}, |\cdot|^\wedge)$ și un homomorfism de corpuri $i : K \rightarrow \widehat{K}$ așa fel încât i este izometrie între K și $i(K)$ iar $i(K)$ este dens în $\widehat{K}$.*

Corpul $(\widehat{K}, |\cdot|^\wedge)$ este unic până la un izomorfism izometric de corpuri normate.

⊖ **Demonstrație.** Vom prezenta numai o schiță de demonstrație.

Un șir $(x_n)_n \subseteq (K, |\cdot|)$ este șir Cauchy dacă $|x_n - x_m| \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0$.

Fie $\mathcal{K} = \{(x_n)_n : (x_n)_n \text{ șir Cauchy în } K\}$.

Dacă K este complet atunci $\mathcal{K}$ coincide cu mulțimea șirurilor convergente pe K ; în acest caz $\widehat{K} = K, |\cdot|^\wedge = |\cdot|$ și i va fi aplicația identică.

Dacă există șiruri Cauchy divergente în K atunci definim pe $\mathcal{K}$ două operații prin:

$$(x_n)_n + (y_n)_n = (x_n + y_n)_n \text{ și } (x_n)_n \cdot (y_n)_n = (x_n \cdot y_n)_n.$$

Cu aceste operații $\mathcal{K}$ este un inel comutativ cu unitate. Mulțimea $\mathcal{O} = \{(x_n)_n : x_n \rightarrow 0\}$ este un ideal maximal în $\mathcal{K}$. Atunci inelul cât $\widehat{K} = \mathcal{K}/\mathcal{O}$ este un corp; un element al acestui spațiu $\widehat{x} = [(x_n)] = \{(y_n)_n \in \mathcal{K} : x_n - y_n \rightarrow 0\}$.

Fie $i : K \rightarrow \widehat{K}, i(x) = [\bar{x}]$, unde $\bar{x}$ este șirul constant cu termenul general x ($i(x)$ este mulțimea tuturor șirurilor convergente în K la x). Aplicația i este un homomorfism de corpuri.

Pentru orice $\widehat{x} = [(x_n)] \in \widehat{K}$, $(|x_n|)_n$ este șir Cauchy în $\mathbb{R}$ și deci există $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| \in \mathbb{R}$; această limită nu depinde de șirul reprezentant $(x_n)_n$. Putem defini consistent $|\cdot|^\wedge : \widehat{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$ prin $|\widehat{x}|^\wedge = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$.

Se arată ușor că $|\cdot|^\wedge$ este o normă de corp pe $\widehat{K}$ și că i este o izometrie între K și $i(K)$.

Fie $\widehat{x} = [(x_n)] \in \widehat{K}; \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n, m \geq n_0, |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci elementul $[\widehat{x}]_0 = [\bar{x}_{n_0}] \in i(K)$ și $|\widehat{x} - [\widehat{x}]_0|^\wedge = \lim_n |x_n - x_{n_0}| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Rezultă că $\overline{i(K)} = \widehat{K}$.

Fie $(\widehat{x}^p)_p \subseteq (\widehat{K}, |\cdot|^\wedge)$ un șir Cauchy: $\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall p, q \geq p_0$, $|\widehat{x}^p - \widehat{x}^q|^\wedge < \frac{\varepsilon}{3}$. Cum $i(K)$ este dens în $\widehat{K}$, $\forall p \in \mathbb{N}, \exists x_p \in K$ a.î. $|i(x_p) - \widehat{x}^p|^\wedge < \frac{1}{p}$. Fie $p_1 \geq p_0$ a.î. $\frac{1}{p} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall p \geq p_1$. Atunci, $\forall p, q \geq p_1$,

$$\begin{aligned} |x_p - x_q| &= |i(x_p) - i(x_q)|^\wedge \leq |i(x_p) - \widehat{x}^p|^\wedge + |\widehat{x}^p - \widehat{x}^q|^\wedge + |\widehat{x}^q - i(x_q)|^\wedge < \\ &< \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{q} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Rezultă că șirul $(x_p)_p \subseteq K$ este șir Cauchy și deci $\widehat{x} = [(x_p)] \in \widehat{K}$. În plus

$$|\widehat{x} - \widehat{x}^p|^\wedge \leq |\widehat{x} - i(x_p)|^\wedge + |i(x_p) - \widehat{x}^p|^\wedge \leq \frac{1}{p} + \lim_{q \rightarrow \infty} |x_p - x_q| \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0.$$

Deci $(\widehat{K}, |\cdot|^\wedge)$ este un corp normat complet care conține un subcorp dens ce este izomorf și izometric cu K .

Unicitatea se demonstrează ca și în cazul unicității teoremei lui Hausdorff.

■

1.2.2 Definiție. Corpul $(\widehat{K}, |\cdot|^\wedge)$ construit în teorema precedentă se numește **completatul** corpului $(K, |\cdot|)$; așa cum am observat în teoremă, completatul este unic până la un izomorfism izometric de corpuri normate.

1.2.3 Observații. (i) Corpul $(K, |\cdot|)$ este ne-arhimedian dacă și numai dacă completatul său $(\widehat{K}, |\cdot|^\wedge)$ este ne-arhimedian.

Într-adevăr, dacă $(K, |\cdot|)$ este ne-arhimedian, atunci, $\forall \widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{K}, \forall \varepsilon > 0, \exists x, y \in K$ a.î. $|i(x) - \widehat{x}|^\wedge < \varepsilon$ și $|i(y) - \widehat{y}|^\wedge < \varepsilon$. Atunci

$$\begin{aligned} |\widehat{x} + \widehat{y}|^\wedge &\leq |\widehat{x} - i(x) + i(x) + i(y) - i(y) + \widehat{y}|^\wedge \leq |\widehat{x} - i(x)|^\wedge + |x + y| + |\widehat{y} - i(y)|^\wedge < \\ &< 2\varepsilon + \max\{|x|, |y|\} \leq 2\varepsilon + \max\{\varepsilon + |\widehat{x}|^\wedge, \varepsilon + |\widehat{y}|^\wedge\} < 3\varepsilon + \max\{|\widehat{x}|^\wedge, |\widehat{y}|^\wedge\}. \end{aligned}$$

Reciproca afirmației este evidentă.

(ii) Din teorema 1.1.5, 3) remarcăm că, dacă $|\cdot|_1$ și $|\cdot|_2$ sunt două norme echivalente pe corpul K atunci ele sunt uniform echivalente (au aceleași șiruri Cauchy). Rezultă imediat din demonstrația teoremei anterioare că $|\cdot|_1^\wedge \sim |\cdot|_2^\wedge$ pe corpul $\widehat{K} = \mathcal{K}/\mathcal{O}$.

Deci completatul lui K în raport cu $|\cdot|_1$ este același cu completatul în raport cu $|\cdot|_2$ iar normele corespunzătoare lui $|\cdot|_1$ și $|\cdot|_2$ pe acest completat sunt echivalente.

(iii) Conform teoremei lui Ostrowski orice normă arhimediană pe $\mathbb{Q}$ este echivalentă cu norma modul. Rezultă din observația de mai sus că avem un singur completat arhimedian al lui $\mathbb{Q}$ și acesta este mulțimea numerelor reale (vezi modelul lui Cantor pentru mulțimea numerelor reale).

Orice normă ne-arhimediană este sau norma trivială sau una dintre normele p -adice. Norma trivială induce pe $\mathbb{Q}$ metrica discretă în raport cu care $\mathbb{Q}$ este spațiu metric complet și deci corp normat complet.

În cele ce urmează vom construi completatul $\mathbb{Q}_p$ al lui $\mathbb{Q}$ în raport cu normele p -adice. Acest completat se numește corpul numerelor p -adice și joacă, în analiza ultrametrică, același rol pe care îl joacă corpul numerelor reale în analiza reală.

Fie p un număr prim; urmând exemplul 1.1.11, punctul (ii), $\forall x \in \mathbb{Q}^*$, există un unic $n \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = p^n \cdot \frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}^*$ sunt două numere prime cu p . Am definit

$$|x|_p = \frac{1}{p^n} = p^{-n} \text{ și } |0|_p = 0.$$

Aplicația $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o normă ne-arhimediană pe $\mathbb{Q}$. Conform teoremei 1.2.1 corpul normat $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ admite un completat $(\widehat{\mathbb{Q}}, |\cdot|_p) \equiv (\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ unic până la un izomorfism izometric, completat care este de asemenea corp ne-arhimedian (vezi observația 1.2.3, (i)). În cele ce urmează ne propunem să construim efectiv acest completat plecând de la $\mathbb{Q}$.

Numerele întregi p -adice

Reamintim relația de congruență modulo q pe $\mathbb{Z}$; astfel dacă $q \in \mathbb{N}, q > 1$ definim pe $\mathbb{Z}$ următoarea relație binară, numită congruență modulo q : dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, spunem că a este congruent cu b modulo q și scriem $a \equiv b \pmod{q}$ dacă $q|(a-b)$ ($a-b$ este divizibil prin q).

Fie atunci

$$\mathcal{Z} = \{(x_n)_n \subseteq \mathbb{Z} : x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Să dăm exemple de șiruri care se găsesc în $\mathcal{Z}$:

- 1). Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{Z}, x_n = p^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$; evident $x_n - x_{n-1}$ este divizibil cu $p^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $(x_n)_n \in \mathcal{Z}$.
- 2). Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{Z}, x_n = 1 + p + \dots + p^n, \forall n \in \mathbb{N}$; este evident că $(x_n)_n \in \mathcal{Z}$.
- 3). Orice șir constant $\bar{x}$, unde $x \in \mathbb{Z}$, este un element din $\mathcal{Z}$.

Pe mulțimea $\mathcal{Z}$ vom defini o relație prin:

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \iff x_n \equiv y_n \pmod{p^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se poate ușor observa că $\sim$ este o relație de echivalență pe $\mathcal{Z}$.

1.2.4 Definiție. Mulțimea cât $\mathcal{Z}/\sim$ se numește mulțimea **întregilor p -adici** și se notează cu $\mathbb{Z}_p$.

Fie $\hat{x} = [(x_n)] \in \mathbb{Z}_p$; $\hat{x}$ este clasa de reprezentant șirul $(x_n)_n \subseteq \mathbb{Z}$ adică mulțimea tuturor șirurilor din $\mathcal{Z}$ echivalente cu $(x_n)_n$. $\forall n \in \mathbb{N}$, notăm cu $\bar{x}_n$ cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea că

$$x_n \equiv \bar{x}_n \pmod{p^{n+1}};$$

este evident că

$$0 \leq \bar{x}_n < p^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

și că

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \bar{x}_n \equiv x_n \equiv x_{n-1} \equiv \bar{x}_{n-1} \pmod{p^n}.$$

Atunci $(\bar{x}_n)_n \in \mathcal{Z}$ și

$$(x_n)_n \sim (\bar{x}_n)_n$$

deci $\hat{x} = [(\bar{x}_n)]$. Șirul $(\bar{x}_n)_n$ se numește **reprezentarea canonică** a întregului p -adic $\hat{x}$.

1.2.5 Propoziție. *Doi întregi p -adici coincid dacă și numai dacă au aceeași reprezentare canonică.*

Demonstrație. Fie $(\bar{x}_n)_n$ reprezentarea canonică a întregului p -adic $\hat{x}$ și $(\bar{y}_n)_n$ reprezentarea canonică a lui $\hat{y}$. Dacă $\hat{x} = \hat{y}$ atunci $(\bar{x}_n)_n \sim (\bar{y}_n)_n$ și deci $\bar{x}_n \equiv \bar{y}_n \pmod{p^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$. Dar, cum $0 \leq \bar{x}_n < p^{n+1}$ și $0 \leq \bar{y}_n < p^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, rezultă că $\bar{x}_n = \bar{y}_n, \forall n \in \mathbb{N}$. ■

Rezultă că un întreg p -adic este unic determinat de reprezentarea sa canonică.

1.2.6 Propoziție. *Fie $(\bar{x}_n)_n$ reprezentarea canonică a întregului p -adic $\hat{x}$; atunci există un șir $(\bar{a}_n)_n \subseteq \mathbb{N}$ așa fel încât, $\forall n \in \mathbb{N}$:*

$$\bar{x}_n = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 p + \cdots + \bar{a}_n p^n \text{ și } 0 \leq \bar{a}_n < p.$$

Demonstrație. Deoarece, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\bar{x}_n \equiv \bar{x}_{n-1} \pmod{p^n}$, $\exists \bar{a}_n \in \mathbb{Z}$ a.î. $\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1} = \bar{a}_n p^n$. Dar $0 \leq \bar{x}_n < p^{n+1}$ și $0 \leq \bar{x}_{n-1} < p^n$ de unde $-p^n < \bar{a}_n p^n < p^{n+1}$ sau $-1 < \bar{a}_n < p$. Rezultă că $0 \leq \bar{a}_n < p$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să notăm acum $\bar{a}_0 = x_0$ și, observând că $0 \leq \bar{a}_0 < p$, rezultă că am determinat șirul $(\bar{a}_n)_n \subseteq [0, p) \cap \mathbb{N}$ a.î. $\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + \bar{a}_n p^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Din relația precedentă rezultă că $\bar{x}_n = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 p + \cdots + \bar{a}_n p^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

1.2.7 Observație. Remarcăm că $\mathbb{Z}_p$ este în corespondență bijectivă cu mulțimea șirurilor $(\bar{x}_n)_n$ de forma $\bar{x}_n = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 p + \cdots + \bar{a}_n p^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, unde $\bar{a}_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Rezultă de aici că $\mathbb{Z}_p$ are puterea continuului (cardinalul lui $\mathbb{Z}_p$ este același cu cardinalul lui $\mathbb{R}$, adică c).

1.2.8 Exemple. 1). Fie $(x_n)_n \in \mathcal{Z}$, $x_n = p^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și fie $\hat{x} = [(x_n)] \in \mathbb{Z}_p$. Reprezentarea sa canonică este $\bar{0}$ (șirul constant zero). Rezultă că $\hat{x} = [\bar{0}]$.

2). Fie $\hat{x} = [(x_n)] \in \mathbb{Z}_p$, unde $x_n = 1 + p + \cdots + p^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$; după propoziția precedentă este evident că $(x_n)_n$ este reprezentarea sa canonică.

3). Fie $\hat{x} = [\bar{x}] \in \mathbb{Z}_p$ unde $x \in \mathbb{Z}$; dacă scriem pe x în baza p obținem $x = a_0 + a_1 p + \cdots + a_q p^q$, unde $a_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Construim șirul $(\bar{x}_n)_n$ punând $\bar{x}_k = a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^k$ dacă $k < q$ și $\bar{x}_k = a_0 + a_1 p + \cdots + a_q p^q$, $\forall k \geq q$; atunci $(\bar{x}_n)_n$ este reprezentarea canonică a lui $\hat{x}$.

Aplicația $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$ definită prin $i(x) = [\bar{x}]$ este injectia canonică a mulțimii numerelor întregi în mulțimea întregilor p -adici.

Pe $\mathbb{Z}_p$ definim două operații astfel: $\forall \hat{x} = [(x_n)], \hat{y} = [(y_n)] \in \mathbb{Z}_p$:

$$\hat{x} + \hat{y} = [(x_n + y_n)], \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = [(x_n \cdot y_n)].$$

Se poate ușor constata că operațiile sunt consistent definite și că $\mathbb{Z}_p$ este un inel comutativ cu unitate în raport cu aceste două operații. Elementul neutru la adunare este $\hat{0} = [\bar{0}]$ iar la înmulțire $\hat{1} = [\bar{1}]$.

Aplicația i definită mai sus devine homomorfism de inele în raport cu aceste două operații.

Fie $U \subseteq \mathbb{Z}_p$ mulțimea elementelor inversabile față de operația de înmulțire, adică:

$$U = \{\hat{x} \in \mathbb{Z}_p : \exists \hat{y} \in \mathbb{Z}_p \text{ a.î. } \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{1}\}.$$

Evident că $\hat{y}$ este inversul lui $\hat{x}$ în inelul $\mathbb{Z}_p$.

Teorema următoare dă o caracterizare a acestor elemente.

1.2.9 Teoremă. $\hat{x} = [(x_n)] \in U \iff x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

⊗ Demonstrație. $\implies$: Fie $\hat{x} = [(x_n)] \in U$; atunci există $\hat{y} = [(y_n)] \in U$ a.î. $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{1}$. Rezultă că $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \cdot y_n \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}.$$

În particular $x_0 \cdot y_0 \equiv 1 \pmod{p}$ de unde rezultă că $x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

$\impliedby$: Presupunem că $x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$; deoarece $x_1 \equiv x_0 \pmod{p}, x_2 \equiv x_1 \pmod{p}, \dots, x_n \equiv \dots \equiv x_0 \pmod{p}$, rezultă că

$$(1) \quad x_n \not\equiv 0 \pmod{p}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

În particular $\forall n \in \mathbb{N}, x_n$ și p^{n+1} sunt prime între ele și deci există două numere întregi y_n și z_n a.î.

$$(2) \quad y_n \cdot x_n + z_n \cdot p^{n+1} = 1.$$

Cum $x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}$, rezultă din relația precedentă că $x_n \cdot y_n - x_{n-1} \cdot y_{n-1} = (x_n \cdot y_n - 1) + (1 - x_{n-1} \cdot y_{n-1})$ este divizibil prin $p^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Deci

$$(3) \quad x_n \cdot y_n \equiv x_{n-1} \cdot y_{n-1} \pmod{p^n}.$$

Acum din (3), $x_n \cdot y_n - x_{n-1} \cdot y_{n-1} = x_n \cdot y_n - x_n \cdot y_{n-1} + x_n \cdot y_{n-1} - x_{n-1} \cdot y_{n-1} = x_n(y_n - y_{n-1}) + y_{n-1}(x_n - x_{n-1})$ este divizibil cu p^n ; din (1), x_n nu este divizibil cu p și, deoarece $(x_n)_n \in \mathcal{Z}$, $x_n - x_{n-1}$ este divizibil cu p^n . Rezultă atunci că $y_n - y_{n-1}$ este divizibil cu p^n adică

$$y_n \equiv y_{n-1} \pmod{p^n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

ceea ce antrenează $(y_n)_n \in \mathcal{Z}$. Fie $\hat{y} = [(y_n)] \in \mathbb{Z}_p$; relația (2) spune că $x_n \cdot y_n \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$ ceea ce înseamnă că $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{1}$. Deci $\hat{x} \in U$. ■

1.2.10 Observații. (i) Dacă $(\bar{x}_n)_n$ este reprezentarea canonică a lui $\hat{x}$, atunci $\bar{x}_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$ înseamnă $\bar{x}_0 \neq 0$.

(ii) Dacă $x \in \mathbb{Z}$ atunci $i(x) = [\bar{x}] \in U$ dacă și numai dacă $p \nmid x$ (p nu divide x). Într-adevăr, după exemplul 3) din 1.2.8 și din observația precedentă, $i(x) \in U \iff a_0 \neq 0$ de unde $x = \bar{x}_q$ nu este divizibil cu p .

(iii) Fie $\mathbb{Q}' = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^* \text{ cu } p \nmid n \right\}$; din observația precedentă $\hat{x} = i(n) \in U$ și deci există $\hat{y} \in \mathbb{Z}_p$ a.î. $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{1}$.

Vom extinde acum aplicația de scufundare i la $\mathbb{Q}'$ prin $\frac{m}{n} \mapsto i(m) \cdot \hat{y}$.

Aplicația extinsă se va nota tot cu i . Astfel interpretăm pe $\hat{y}$ ca fiind $i\left(\frac{1}{n}\right)$.

Aplicația extinsă este injectivă și păstrează de asemenea operațiile de adunare și de înmulțire. Vom conveni atunci să identificăm $\mathbb{Q}'$ cu $i(\mathbb{Q}')$ și deci să considerăm deci $\mathbb{Q}'$ ca fiind submulțime a inelului întregilor p -adici $\mathbb{Z}_p$.

Teorema următoare permite să reprezentăm elementele inelului $\mathbb{Z}_p$ cu ajutorul elementelor inversabile.

1.2.11 Teoremă (teorema de reprezentare a întregilor p -adici). *Oricare ar fi $\hat{x} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{\hat{0}\}$, există un număr natural m și un element $\hat{x}_0 \in U$ unice așa fel încât:*

$$\hat{x} = p^m \cdot \hat{x}_0.$$

⊙ **Demonstrație.** Dacă $\hat{x} \in U$ atunci putem lua $m = 0$ și $\hat{x}_0 = \hat{x}$.

Presupunem acum că $\hat{x} = [(x_n)] \notin U$; atunci $x_0 \equiv 0 \pmod{p}$. Deoarece $\hat{x} \neq \hat{0}$, $\exists m \in \mathbb{N}$ a.î. $x_m \not\equiv 0 \pmod{p^{m+1}}$; să considerăm că m este cel mai mic număr cu această proprietate. Evident că $m > 0$ și că $x_{m-1} \equiv 0 \pmod{p^m}$.

$$x_m \equiv x_{m-1} \pmod{p^m} \implies x_m \equiv 0 \pmod{p^m},$$

$$x_{m+1} \equiv x_m \pmod{p^{m+1}} \implies x_{m+1} \equiv 0 \pmod{p^m},$$

...

$$x_{m+s} \equiv x_{m+s-1} \pmod{p^{m+s}} \implies x_{m+s} \equiv 0 \pmod{p^m}.$$

Șirul $(x_n)_n$ este deci de forma

$$(a_0p, a_1p^2, \dots, a_{m-1}p^m, a_mp^m, a_{m+1}p^m, \dots),$$

unde $a_m \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Fie $y_s = \frac{1}{p^m} \cdot x_{m+s}$, $\forall s \in \mathbb{N}$; șirul $(y_s)_s$ este de forma

$$(a_m, a_{m+1}p, a_{m+2}p^2, \dots).$$

$\forall s \in \mathbb{N}^*, y_s - y_{s-1} = \frac{1}{p^m}(x_{m+s} - x_{m+s-1}) = \frac{1}{p^m} \cdot a \cdot p^{m+s}$ este divizibil cu p^s și astfel $(y_s)_s \in \mathcal{Z}$. Rezultă că $\hat{x}_0 = [(y_s)] \in \mathbb{Z}_p$. În plus $y_0 = \frac{1}{p^m} \cdot x_m$ nu este divizibil cu p ($x_m \not\equiv 0 \pmod{p^{m+1}}$) și astfel $\hat{x}_0 \in U$.

$p^m \cdot \hat{x}_0 = [(x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+s}, \dots)]$ și deci, $\forall s \in \mathbb{N}$,

$$x_{m+s} - x_s = \underbrace{(x_{m+s} - x_{m+s-1})}_{\text{divizibil prin } p^{m+s}} + \underbrace{(x_{m+s-1} - x_{m+s-2})}_{\text{divizibil prin } p^{m+s-1}} + \dots + \underbrace{(x_{s+1} - x_s)}_{\text{divizibil prin } p^{s+1}},$$

de unde rezultă că $x_{m+s} \equiv x_s \pmod{p^{s+1}}, \forall s \in \mathbb{N}$ și deci $p^m \cdot \hat{x}_0 = \hat{x}$.

Unicitatea: Să presupunem că $\hat{x} = p^m \cdot \hat{x}_0 = p^k \cdot \hat{y}_0$ unde $\hat{x}_0 = [(y_s)], \hat{y}_0 = [(z_s)] \in U$ și deci $\forall s \in \mathbb{N}, y_s \not\equiv 0 \pmod{p}, z_s \not\equiv 0 \pmod{p}$. Pe de altă parte, deoarece $p^m \cdot \hat{x}_0 = p^k \cdot \hat{y}_0$,

$$p^m y_s \equiv p^k z_s \pmod{p^{s+1}}, \forall s \in \mathbb{N}.$$

Dacă în relația de mai sus luăm $s = m - 1$ obținem că p^m divide $p^m y_{m-1} - p^k z_{m-1}$, de unde rezultă $k \geq m$. Procedăm simetric (facem $s = k - 1$) și obținem $k \leq m$. Deci $k = m$.

Acum, $\forall s \in \mathbb{N}, p^m y_{m+s} \equiv p^m z_{m+s} \pmod{p^{m+s+1}}$ de unde rezultă că $y_{m+s} \equiv z_{m+s} \pmod{p^{s+1}}$.

Pe de altă parte, cum $y_{m+s} \equiv y_s \pmod{p^{s+1}}$ și $z_{m+s} \equiv z_s \pmod{p^{s+1}}$, rezultă că $y_s \equiv z_s \pmod{p^{s+1}}, \forall s \in \mathbb{N}$, deci $\hat{x}_0 = \hat{y}_0$. ■

1.2.12 Corolar. $\mathbb{Z}_p$ este domeniu de integritate.

Demonstrație. Presupunem că există două elemente ne-nule ale lui $\mathbb{Z}_p$, $\hat{x}, \hat{y}$ a.î. $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{0}$. Atunci, din teorema de reprezentare de mai sus, $\hat{x} = p^m \cdot \hat{x}_0$ și $\hat{y} = p^k \cdot \hat{y}_0$. Rezultă că $p^{m+k} \cdot \hat{x}_0 \cdot \hat{y}_0 = \hat{0}$. Deoarece $\hat{x}_0, \hat{y}_0 \in U$, ele sunt elemente inversabile. Înmulțim în relația precedentă cu $\hat{x}_0^{-1} \cdot \hat{y}_0^{-1}$ și obținem $p^{m+k} \cdot \hat{1} = \hat{0}$ de unde rezultă că șirul constant egal cu p^{m+k} trebuie să fie echivalent cu șirul constant 0. Din definiția relației de echivalență asta înseamnă că $p^{m+k} \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$ sau, în particular, trebuie ca p^{m+k} să fie divizibil cu p^{m+k+1} ceea ce este absurd. ■

Deoarece, conform corolarului precedent, $\mathbb{Z}_p$ este domeniu de integritate putem construi corpul să de fracții $\mathbb{Q}_p$; vom nota elementele lui $\mathbb{Q}_p$ cu litere grecești $\alpha, \beta, \dots$, iar cu 0 și 1 vom nota elementele neutre la adunare și respectiv la înmulțire din $\mathbb{Q}_p$. Cum $\mathbb{Z}_p$ conține ca sub-inel pe $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_p$ va conține pe $\mathbb{Q}$ ca sub-corp.

În cele ce urmează vom identifica în mod natural $\mathbb{Z}_p$ cu o submulțime a corpului său de fracții $\mathbb{Q}_p$ și deci vom putea scrie: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Q}_p$ și de asemenea $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_p$.

Următorul rezultat este o teoremă de reprezentare a elementelor corpului $\mathbb{Q}_p$.

1.2.13 Teoremă (teorema de reprezentare a numerelor p -adice). *Oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$, există un număr întreg m și un element $\hat{x} \in U$ unice așa fel încât:*

$$\alpha = p^m \cdot \hat{x}.$$

⊗ **Demonstrație.** Să amintim că, pentru construcția corpului de fracții al domeniului de integritate $\mathbb{Z}_p$, se definește o relație de echivalență pe $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^*$ prin

$$(\hat{x}, \hat{y}) \sim (\hat{u}, \hat{v}) \iff \hat{x} \cdot \hat{v} = \hat{y} \cdot \hat{u}.$$

$\mathbb{Q}_p$ este atunci spațiul cât $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^* / \sim$.

Fie acum $\alpha = [(\hat{x}, \hat{y})] \in \mathbb{Q}_p, \alpha \neq 0$; atunci $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_p^*$ și deci, din teorema de reprezentare a întregilor p -adici (teorema 1.2.11), există $m, k \in \mathbb{N}$, există $\hat{x}_0, \hat{y}_0 \in U$ a.î. $\hat{x} = p^m \cdot \hat{x}_0, \hat{y} = p^k \cdot \hat{y}_0$.

$$\text{Atunci } (\hat{x}, \hat{y}) = (p^m \cdot \hat{x}_0, p^k \cdot \hat{y}_0) \sim \begin{cases} (p^{m-k} \hat{x}_0 \hat{y}_0^{-1}, \hat{1}), & \text{dacă } m \geq k \\ (\hat{x}_0 \hat{y}_0^{-1}, p^{k-m}), & \text{dacă } m < k \end{cases}, \text{ de}$$

unde rezultă că $\alpha = p^{m-k} \cdot \hat{x}_0 \cdot \hat{y}_0^{-1}$. Demonstrația se încheie dacă observăm că $\hat{x}_0 \cdot \hat{y}_0^{-1} \in U$.

Unicitatea rezultă din unicitatea reprezentării întregilor p -adici și din construcția corpului de fracții. ■

Teorema de reprezentare de mai sus permite definirea unei norme de corp pe $\mathbb{Q}_p$.

1.2.14 Definiție. Fie $\alpha \in \mathbb{Q}_p$; dacă $\alpha \neq 0$ există în mod unic $m \in \mathbb{Z}, \hat{x} \in U$ a.î. $\alpha = p^m \cdot \hat{x}$. Definim atunci

$$|\alpha|_p = \begin{cases} p^{-m}, & \text{dacă } \alpha \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } \alpha = 0. \end{cases}$$

1.2.15 Teoremă. *Aplicația $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}_+$, definită prin $\alpha \mapsto |\alpha|_p$ este o normă de corp ne-archimedian pe $\mathbb{Q}_p$.*

Demonstrație. Este evident din definiție că $|\alpha|_p = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Fie acum $\alpha = p^m \cdot \hat{x}, \beta = p^k \cdot \hat{y} \in \mathbb{Q}_p^*$ unde $m, k \in \mathbb{Z}, \hat{x}, \hat{y} \in U$.

$\alpha \cdot \beta = p^{m+k} \cdot \hat{x} \cdot \hat{y}$ și, cum $\hat{x} \cdot \hat{y} \in U$, $|\alpha \cdot \beta|_p = p^{-(m+k)} = |\alpha|_p \cdot |\beta|_p$.

$\alpha + \beta = p^m \cdot \hat{x} + p^k \cdot \hat{y}$

1. Să presupunem întâi că $m > k$; atunci $\alpha + \beta = p^k \cdot (p^{m-k} \cdot \hat{x} + \hat{y})$.

Să presupunem că $\hat{x} = [(x_n)], \hat{y} = [(y_n)]$ unde $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathcal{Z}$. Din teorema 1.2.9 rezultă că $y_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$ și atunci $p^{m-k}x_0 + y_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Rezultă, în baza aceleiași teoreme 1.2.9, că $\hat{z} = p^{m-k} \cdot \hat{x} + \hat{y} \in U$ și $\alpha + \beta = p^k \cdot \hat{z}$; din definiția normei, $|\alpha + \beta|_p = p^{-k} = \max\{p^{-m}, p^{-k}\} = \max\{|\alpha|_p, |\beta|_p\}$.

2. Dacă $m < k$ se procedează analog și se obține $|\alpha + \beta|_p = p^{-m} = \max\{|\alpha|_p, |\beta|_p\}$.

3. Dacă $m = k$ atunci $\alpha + \beta = p^m \cdot (\hat{x} + \hat{y})$. Din teorema de reprezentare a întregilor p -adici, $\hat{x} + \hat{y} = p^l \cdot \hat{z}$, unde $l \in \mathbb{N}$ și $\hat{z} \in U$. Atunci $\alpha + \beta = p^{m+l} \cdot \hat{z}$ și astfel $|\alpha + \beta|_p = p^{-(m+l)} \leq p^{-m} = \max\{|\alpha|_p, |\beta|_p\}$. ■

1.2.16 Observație. $\forall x \in \mathbb{Q}^*$ există un unic $n \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = p^n \cdot \frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}^*$ sunt două numere prime cu p . Atunci $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{Z}_p$; mai mult cum $p \nmid a, \frac{a}{b} \in U$. Atunci $|x|_p = p^{-n}$. Se vede deci că urma pe $\mathbb{Q}$ a normei ne-archimedene de corp de pe $\mathbb{Q}_p$ este chiar norma p -adică definită în exemplul 1.1.11, (ii). Teorema următoare arată că $\mathbb{Q}$ este o submulțime densă în $\mathbb{Q}_p$.

1.2.17 Teoremă.

1. Fie $\alpha = [(x_n)] \in \mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Q}_p$; atunci $(x_n)_n \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}_p$ și $x_n \xrightarrow{|\cdot|_p} \alpha$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{Q}_p, \exists (x_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$ așa fel încât $x_n \xrightarrow{|\cdot|_p} \alpha$.

⊗ **Demonstrație.** 1. Presupunem că $\alpha = [(x_n)] \in \mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Q}_p$; șirul $(x_n)_n \subseteq \mathbb{Z}$ poate fi gândit ca un șir din $\mathbb{Q}_p$ prin identificarea fiecărui termen x_n cu clasa de echivalență generată de șirul constant $\bar{x}_n$: $x_n \equiv i(x_n) = [\bar{x}_n]$.

Să observăm că, $\forall n \in \mathbb{N}, (x_m)_m \sim (x_{n+m})_m$; într-adevăr, $\forall m \in \mathbb{N}, x_{n+m} \equiv x_m \pmod{p^{m+1}}$. Rezultă atunci că putem schimba reprezentantul lui $\alpha = [(x_{n+m})_m]$; astfel $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha - [\bar{x}_n] = [(x_{n+m} - x_n)_m].$$

Dar, $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+m} - x_n$ se divide cu p^{n+1} și astfel

$$\alpha - [\bar{x}_n] = p^{n+1} \cdot [(x'_{n+m} - x'_n)_m],$$

de unde $|\alpha - [\bar{x}_n]|_p \leq p^{-(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}$ și deci $x_n \equiv [\bar{x}_n] \xrightarrow{|\cdot|_p} \alpha$.

2. Dacă $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$ atunci, după teorema de reprezentare a numerelor p -adice, $\alpha = p^m \cdot \hat{x}$ cu $m \in \mathbb{Z}$ și $\hat{x} \in U \subseteq \mathbb{Z}_p$.

Dacă $m \in \mathbb{N}$ atunci $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ și deci, după punctul precedent, α este limită a unui șir de numere întregi.

Dacă $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ și $\hat{x} = [(x_n)]$ atunci, folosind din nou punctul precedent, $x_n \xrightarrow{|\cdot|_p} \hat{x}$. Atunci $p^m \cdot x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{|\cdot|_p} p^m \cdot \hat{x} = \alpha$. Demonstrația se încheie dacă mai observăm că $(p^m \cdot x_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$. ■

Rezultatul următor este de același tip cu lema lui Cesàro din analiza clasică pe $\mathbb{R}$.

1.2.18 Teoremă. *Orice șir mărginit în normă din $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ conține un subșir convergent.*

⊖ **Demonstrație.** Dacă șirul $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{Q}_p$ are un subșir constant egal cu 0 atunci acest subșir converge la 0.

Putem deci presupune că $\alpha_n \in \mathbb{Q}_p^*, \forall n \in \mathbb{N}$, și atunci, după teorema de structură a numerelor p -adice, există un șir de întregi $(k_n)_n \subseteq \mathbb{Z}$ și un șir $(\hat{x}_n)_n \subseteq U \subseteq \mathbb{Z}_p$ a.î.

$$\alpha_n = p^{k_n} \cdot \hat{x}_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1). Presupunem întâi că $(\alpha_n)_n \subseteq \mathbb{Z}_p$; atunci $(k_n)_n \subseteq \mathbb{N}$ și, deoarece $|\alpha_n|_p = p^{-k_n} \leq 1$, rezultă că orice șir din $\mathbb{Z}_p$ este mărginit.

Dacă $(k_n)_n$ are un subșir nemărginit atunci $(\alpha_n)_n$ are un subșir care converge la 0 și demonstrația se încheie.

Presupunem că șirul $(k_n)_n$ este un șir de numere naturale mărginit; atunci acesta are un subșir, notat tot $(k_n)_n$, constant egal cu un $k \in \mathbb{N}$. Rezultă că $(\alpha_n)_n$ are un subșir, notat tot cu $(\alpha_n)_n$, de forma $\alpha_n = p^k \cdot \hat{x}_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Fie, $\forall n \in \mathbb{N}, \hat{x}_n = [(x_m^n)_m]$, unde $(x_m^n)_m$ este reprezentarea canonică a întregului p -adic $\hat{x}_n$. Atunci

$$0 \leq x_m^n < p^{m+1}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Șirul de numere întregi $(x_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ia valori în mulțimea finită $\{0, 1, \dots, p-1\}$; rezultă că există un element $x_0 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ și o submulțime infinită $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{N}$ a.î. $x_0^n = x_0, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Șirul de numere întregi $(x_1^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ia valori în mulțimea finită $\{0, 1, \dots, p^2-1\}$; rezultă că există un element $x_1 \in \{0, 1, \dots, p^2-1\}$ și o submulțime infinită

$\mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{N}_0$ a.î. $x_1^n = x_1, \forall n \in \mathbb{N}_1$.

Inductiv, vom găsi la pasul $q \in \mathbb{N}$ un element $x_q \in \{0, 1, \dots, p^{q+1} - 1\}$ și o submulțime infinită $\mathbb{N}_q \subseteq \mathbb{N}_{q-1}$ a.î. $x_q^n = x_q, \forall n \in \mathbb{N}_q$.

Alegem acum $n_0 \in \mathbb{N}_0, n_1 \in \mathbb{N}_1$ cu $n_1 > n_0, \dots, n_q \in \mathbb{N}_q$ cu $n_q > n_{q-1}, \dots$.

Fie șirul $(x_q)_q \subseteq \mathbb{Z}; \forall q \in \mathbb{N}, n_q \in \mathbb{N}_q \subseteq \mathbb{N}_{q-1}$ și deci $x_q^{n_q} = x_q$ și $x_{q-1}^{n_q} = x_{q-1}$; rezultă că $x_q - x_{q-1} = x_q^{n_q} - x_{q-1}^{n_q} \equiv 0 \pmod{p^q}$. Deci $(x_q)_q \in \mathcal{Z}$; fie $\hat{x} = [(x_q)] \in \mathbb{Z}_p$.

Să observăm că $\forall q \in \mathbb{N}, n_q \in \mathbb{N}_q \subseteq \mathbb{N}_{q-1} \subseteq \dots \subseteq \mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{N}_0$ și deci $x_i^{n_q} = x_i, \forall i = 0, 1, \dots, q$. Rezultă că $(x_m^{n_q} - x_m)_m = (0, \dots, 0, x_{q+1}^{n_q} - x_{q+1}, \dots)$ și deci $x_{q+s}^{n_q} - x_{q+s} \equiv 0 \pmod{p^{q+1}}, \forall s \geq 1$. Atunci $\hat{x}^{n_q} - \hat{x} = p^{q+1} \cdot \hat{y}_q$ unde

$\hat{y}_q \in \mathbb{Z}_p$ și deci $|\hat{x}^{n_q} - \hat{x}|_p \leq p^{-(q+1)}, \forall q \in \mathbb{N}$ de unde $\hat{x}^{n_q} \xrightarrow{|\cdot|_p} \hat{x}$. Atunci

$\alpha_{n_q} \xrightarrow{|\cdot|_p} p^k \cdot \hat{x}$.

2). Presupunem acum că $(\alpha_n)_n \subseteq \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p$; atunci $(k_n)_n \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Șirul $(\alpha_n)_n$ fiind mărginit, există $M > 0$ a.î. $|\alpha_n|_p = p^{-k_n} \leq M$. Rezultă că șirul $(k_n)_n$ este mărginit și deci admite un subșir, notat tot cu $(k_n)_n$, constant egal cu un $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

Atunci $\alpha_n = p^k \cdot \hat{x}_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dar $(\hat{x}_n)_n \subseteq \mathbb{Z}_p$ este mărginit (orice șir din $\mathbb{Z}_p$ este mărginit) și, conform primei părți a demonstrației, acesta are un subșir, notat tot cu $(\hat{x}_n)_n$, convergent la un $\hat{x} \in \mathbb{Z}_p$; atunci $\alpha_n \xrightarrow{|\cdot|_p} p^k \cdot \hat{x}$. ■

Teorema precedentă ne permite să demonstrăm completitudinea corpului normat $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$.

1.2.19 Teoremă. Corpul normat $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ este complet.

Demonstrație. Demonstrația este similară demonstrației teoremei de completitudine a lui $\mathbb{R}$.

Orice șir Cauchy în $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ este mărginit. Conform teoremei precedente el are un subșir convergent în $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$. Dar, dacă un șir Cauchy are un subșir convergent, el însuși converge. ■

1.2.20 Observație. Deoarece $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ este corp complet și conține pe $\mathbb{Q}$ ca subcorp normat și dens rezultă că $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ este un completat al lui $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$. Deoarece completatul unui corp normat este unic, până la un izomorfism izometric de corpuri rezultă că $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ este completatul lui $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$.

Bibliografie

[IM] Isac, Gh., Marinescu, Gh. - *Analiză pe corpuri ultrametrice*, Ed. Acad. RSR, București, 1976.

Capitolul 2

Recurențe liniare și neliniare

În acest capitol se tratează teoria generală a recurențelor liniare și unele recurențe neliniare.

Recurențele liniare admit o tratare exhaustivă asemănătoare teoriei ecuațiilor diferențiale liniare. Astfel este studiat spațiul liniar al soluțiilor recurențelor liniare omogene și forma generală a soluțiilor recurențelor liniare ne-omogene. Pentru găsirea unei soluții particulare a recurențelor ne-omogene se prezintă metoda variației constantelor a lui Lagrange.

Recurențele neliniare formează o clasă extrem de întinsă. Ne vom limita în a doua parte a capitolului la o clasă particulară: aceea a mediilor aritmetico-geometrice. Un motiv pentru această alegere îl oferă aplicațiile pe care acest algoritm le găsește în calculul aproximativ al lungimii unor curbe clasice: lemniscatele și elipsele.

Calculul unor mărimi cu implicații astronomice dar și în domenii ca teoria funcțiilor a stat în atenția matematicienilor încă din cele mai vechi timpuri. Viteza de convergență a algoritmului mediei aritmetico-geometrice a fost probată pentru a obține aproximări din ce în ce mai bune pentru lungimea orbitelor eliptice sau pentru evaluări ale arcelor de lemniscată. De descoperirea unor astfel de algoritmi și-au legat numele matematicieni de primă mărime cum ar fi Arhimede în antichitate dar și matematicieni din epoca modernă ca Lagrange, Gauss, Legendre, Landen ș.a.

2.1 Ecuații liniare cu diferențe

2.1.1 Definiție. Fie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, un șir de numere reale.

Definim diferența finită de ordin unu a lui f : $\Delta(f(n)) = f(n+1) - f(n) = x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Definim acum iterat diferențele finite de ordine superioare ale lui f prin

$$(D) \begin{cases} \Delta^0 f(n) = f(n) = x_n, \\ \Delta^1 f(n) = \Delta(f(n)) = f(n+1) - f(n) = x_{n+1} - x_n, \\ \Delta^2 f(n) = \Delta(\Delta^1 f(n)) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = \\ \quad = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n, \\ \quad \dots \\ \Delta^p f(n) = \Delta(\Delta^{p-1} f(n)) = \sum_{k=0}^p (-1)^k C_p^k \cdot f(n+p-k) = \\ \quad = \sum_{k=0}^p (-1)^k C_p^k \cdot x_{n+p-k}. \end{cases}$$

Invers, putem determina inductiv translatele lui f cu ajutorul diferențelor finite:

$$(T) \begin{cases} f(n+1) = x_{n+1} = \Delta^1 f(n) + \Delta^0 f(n), \\ f(n+2) = x_{n+2} = \Delta^2 f(n) + 2\Delta^1 f(n) + \Delta^0 f(n), \\ \quad \dots \\ f(n+p) = x_{n+p} = \sum_{k=0}^p C_p^k \cdot \Delta^k f(n). \end{cases}$$

2.1.2 Definiție. O ecuație cu diferențe este o ecuație de forma:

$$(1) \quad F(n, \Delta^0 f(n), \Delta^1 f(n), \dots, \Delta^p f(n)) = 0, n \in \mathbb{N},$$

unde $F : \mathbb{N} \otimes \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Din cele observate mai sus ecuației (1) i se poate asocia o relație de recurență:

$$(2) \quad G(n, f(n), f(n+1), \dots, f(n+p)) = 0.$$

Un șir $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică ecuația (1) (sau ecuația asociată (2)) se numește soluție a ecuației cu diferențe (sau respectiv soluție a relației de recurență). Dacă funcția F (sau echivalent G) este liniară în variabilele $\Delta^0 f(n), \dots, \Delta^p f(n)$ (respectiv $f(n), \dots, f(n+p)$) atunci ecuația cu diferențe se numește ecuație liniară (respectiv recurență liniară).

Forma generală a unei ecuații cu diferențe liniară este:

$$b_0(n) \cdot \Delta^p f(n) + b_1(n) \cdot \Delta^{p-1} f(n) + \dots + b_p(n) \cdot \Delta^0 f(n) = a(n), n \in \mathbb{N},$$

unde $b_0, \dots, b_p$ și a sunt șiruri de numere reale iar recurența liniară asociată va fi de forma:

$$a_0(n) \cdot f(n+p) + a_1(n) \cdot f(n+p-1) + \dots + a_p(n) \cdot f(n) = a(n).$$

Evident aici $a_0(n) = b_0(n), \forall n \in \mathbb{N}$.

Vom presupune în cele ce urmează că $a_0(n) = b_0(n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ și, prin împărțire cu $a_0(n)$ și renotare a coeficienților a_i respectiv b_i , vom obține forma generală a ecuațiilor cu diferențe liniare:

$$(D) \quad \Delta^p f(n) + b_1(n) \cdot \Delta^{p-1} f(n) + \dots + b_p(n) \cdot \Delta^0 f(n) = a(n), \forall n \in \mathbb{N},$$

și recurența asociată:

$$(R) \quad f(n+p) + a_1(n) \cdot f(n+p-1) + \dots + a_p(n) \cdot f(n) = a(n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Problema pe care vrem să o rezolvăm în acest paragraf este de a găsi toate șirurile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică ecuația (D) sau echivalent ecuația (R).

Ecuatii liniare omogene

În cazul particular în care $a(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ecuațiile (D) și respectiv (R) de mai sus se rescriu:

$$(DO) \quad \Delta^p f(n) + b_1(n) \cdot \Delta^{p-1} f(n) + \dots + b_p(n) \cdot \Delta^0 f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$(RO) \quad f(n+p) + a_1(n) \cdot f(n+p-1) + \dots + a_p(n) \cdot f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

și se numesc ecuația liniară omogenă cu diferențe și respectiv recurența liniară omogenă asociată; p se va numi ordinul acestor recurențe.

2.1.3 Observație. Dacă presupunem că există $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $a_p(n_0) = 0$ atunci ordinul p al recurenței omogene se poate reduce.

Într-adevăr, în acest caz, dacă presupunem că $a_{p-1}(n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci făcând $n = n_0$ în (RO) obținem

$$f(n_0+1) = F_1(f(n_0+2), \dots, f(n_0+p)),$$

unde F_1 este aplicație liniară de cele $p-1$ variabile ale sale.

În (RO) facem acum $n = n_0 + 1$, înlocuim pe $f(n_0 + 1)$ cu valoarea de mai sus și obținem:

$$f(n_0 + 2) = F_2(f(n_0 + 3), \dots, f(n_0 + p + 1)),$$

unde F_2 este liniară de toate cele $p - 1$ variabile ale sale, ș.a.m.d.

După n pași obținem

$$f(n_0 + n) = F_n(f(n_0 + 1 + n), \dots, f(n_0 + p - 1 + n)).$$

Dacă în ultima relație facem translația $f(n_0 + n) = g(n)$ obținem

$$g(n) = F_n(g(n + 1), \dots, g(n + p - 1))$$

care este o recurență liniară omogenă de ordin $p - 1$.

În cele ce urmează vom considera numai recurențe liniare omogene de ordin p cu $a_p(n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

2.1.4 Teoremă. Fie $p \in \mathbb{N}^*, a_1, \dots, a_p$ șiruri de numere reale date a.î. $a_p(n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ și

$$(RO) \quad f(n + p) + a_1(n) \cdot f(n + p - 1) + \dots + a_p(n) \cdot f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

recurența liniară omogenă de ordin p ; atunci mulțimea

$$V = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ verifică } (RO)\}$$

este un spațiu liniar real de dimensiune p .

Demonstrație. Este evident că V este spațiu liniar real față de operațiile uzuale de adunare și înmulțire cu scalari între șiruri; fie $\dim V$ dimensiunea sa.

Remarcăm că un șir $f \in V$ este perfect determinat dacă cunoaștem primele sale p valori. Într-adevăr, cunoscând $f(0), f(1), \dots, f(p - 1)$, determinăm $f(p)$ dând lui n valoarea 0 în (RO); apoi făcând $n = 1$, determinăm $f(p + 1)$, ș.a.m.d.

Fie atunci $f^0, f^1, \dots, f^{p-1} \in V$ a.î.

$$f^k(k) = 1 \text{ și } f^k(i) = 0, \forall i \in \{0, \dots, p - 1\} \setminus \{k\}.$$

Fie $\lambda_0 \cdot f^0 + \dots + \lambda_{p-1} \cdot f^{p-1} = \underline{0}$ o combinație liniară nulă a acestor șiruri; rezultă în particular că

$$(1) \quad \lambda_0 \cdot f^0(n) + \dots + \lambda_{p-1} \cdot f^{p-1}(n) = 0, \forall n = 0, \dots, p-1.$$

Dar, $\forall n \in \{0, \dots, p-1\}$, $f^k(n) = 0, \forall k \neq n$ și $f^n(n) = 1$, de unde $\lambda_n = 0, \forall n = 0, \dots, p-1$ și deci $f^0, \dots, f^{p-1}$ sunt liniar independente.

Rezultă din cele de mai sus că:

$$(2) \quad \dim V \geq p.$$

Fie acum $g^0, \dots, g^{p-1}, g^p \in V$, $(p+1)$ soluții și $\lambda_0, \dots, \lambda_p$ a.î.

$$(3) \quad \sum_{i=0}^p \lambda_i \cdot g^i = \underline{0}.$$

Atunci

$$(4) \quad \sum_{i=0}^p \lambda_i \cdot g^i(n) = 0, \forall n = 0, \dots, p-1.$$

(4) este un sistem liniar omogen de p ecuații cu $p+1$ necunoscute: $\lambda_0, \dots, \lambda_p$. Acest sistem admite deci și soluții nebanale; deci există $\bar{\lambda}_0, \dots, \bar{\lambda}_p$, nu toate nule, a.î.

$$(5) \quad \sum_{i=0}^p \bar{\lambda}_i \cdot g^i(n) = 0,$$

$\forall n = 0, \dots, p-1$. Vom demonstra prin inducție că (5) este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. (5) este verificată pentru $n = 0, \dots, p-1$.

Presupunem că $m \geq p-1$ și că (5) are loc pentru $n = 0, 1, \dots, m$; folosind că $g^i, i = 0, \dots, p-1$, verifică (RO), deci că, $\forall i = 0, \dots, p-1, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$g^i(n+p) = - \sum_{j=1}^p a_j(n) \cdot g^i(n+p-j),$$

obținem:

$$\sum_{i=0}^p \bar{\lambda}_i \cdot g^i(m+1) = \sum_{i=0}^p \bar{\lambda}_i \cdot g^i((m+1-p)+p) =$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^p \bar{\lambda}_i \cdot a_j(m+1-p) \cdot g^i(m+1-j) = \\
&= - \sum_{j=1}^p a_j(m+1-p) \cdot \sum_{i=0}^p \bar{\lambda}_i \cdot g^i(m+1-j).
\end{aligned}$$

Dar, $\forall j = 1, \dots, p$, $m+1-j \leq m$ și deci, din ipoteza inductivă, $\sum_{i=0}^p \bar{\lambda}_i \cdot g^i(m+1-j) = 0$. Rezultă că (5) este verificată pentru $m+1$.

Deoarece (5) este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$ rezultă că

$$\sum_{i=0}^p \bar{\lambda}_i \cdot g^i = \underline{0}$$

ceea ce spune că orice $p+1$ vectori, $g^0, \dots, g^p$, sunt liniar dependenți.

Rezultă că

$$(6) \quad \dim V < p+1.$$

Din (2) și (6) $\dim V = p$. ■

2.1.5 Definiție. Fie $f^0, f^1, \dots, f^{p-1} \in V$; determinantul

$$D[f^0, \dots, f^{p-1}](n) = \begin{vmatrix} f^0(n) & f^1(n) & \dots & f^{p-1}(n) \\ f^0(n+1) & f^1(n+1) & \dots & f^{p-1}(n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^0(n+p-1) & f^1(n+p-1) & \dots & f^{p-1}(n+p-1) \end{vmatrix}$$

$n \in \mathbb{N}$, se numește **determinant Casorati** asociat funcțiilor $f^0, \dots, f^{p-1}$.

2.1.6 Lemă. $\forall f^0, \dots, f^{p-1} \in V, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$D[f^0, \dots, f^{p-1}](n) = (-1)^{np} a_p(0)a_p(1) \cdots a_p(n-1) \cdot D[f^0, \dots, f^{p-1}](0).$$

Demonstrație. Deoarece $f^0, \dots, f^{p-1}$ verifică relația (RO) , $\forall n \geq 1$, $\forall k = 0, \dots, p-1$,

$$f^k(n+p-1) = -a_1(n-1) \cdot f^k(n+p-2) - \dots - a_p(n-1) \cdot f^k(n-1).$$

Înlocuind ultima linie a determinantului Casorati și ținând cont de proprietățile determinantilor obținem, $\forall n \geq 1$:

$$D[f^0, \dots, f^{p-1}](n) = \begin{vmatrix} f^0(n) & & \vdots & f^{p-1}(n) \\ f^0(n+1) & & \vdots & f^{p-1}(n+1) \\ \dots & & \vdots & \dots \\ f^0(n+p-2) & & \vdots & f^{p-1}(n+p-2) \\ -a_p(n-1) \cdot f^0(n-1) & \vdots & -a_p(n-1) \cdot f^{p-1}(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= -a_p(n-1) \cdot (-1)^{p-1} \cdot D[f^0, \dots, f^{p-1}](n-1).$$

De aici, aplicând inductiv egalitatea de mai sus:

$$D[f^0, \dots, f^{p-1}](n) = (-1)^{pk} a_p(n-1) \cdots a_p(n-k) \cdot D[f^0, \dots, f^{p-1}](n-k) =$$

$$= (-1)^{pn} a_p(n-1) \cdots a_p(0) \cdot D[f^0, \dots, f^{p-1}](0).$$

■

2.1.7 Corolar. $D[f^0, \dots, f^{p-1}](0) = 0 \iff \exists n \in \mathbb{N}, D[f^0, \dots, f^{p-1}](n) = 0.$

2.1.8 Propoziție. Vectorii $f^0, \dots, f^{p-1} \in V$ sunt liniar independenți dacă și numai dacă $D[f^0, \dots, f^{p-1}](0) \neq 0$ și deci, echivalent, $D[f^0, \dots, f^{p-1}](n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. Presupunem că $f^0, \dots, f^{p-1}$ nu sunt liniar independenți; deci există $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}$, nu toate nule, așa fel încât $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \cdot f^k = \underline{0}$. Putem să presupunem, fără a restrânge generalitatea că $\lambda_0 \neq 0$; atunci

$$\lambda_0 \cdot D[f^0, \dots, f^{p-1}](0) = \begin{vmatrix} \lambda_0 \cdot f^0(0) & f^1(0) & \dots & f^{p-1}(0) \\ \lambda_0 \cdot f^0(1) & f^1(1) & \dots & f^{p-1}(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0 \cdot f^0(p-1) & f^1(p-1) & \dots & f^{p-1}(p-1) \end{vmatrix}.$$

Dacă înmulțim coloana a doua a determinantului de mai sus cu $\lambda_1, \dots$, coloana p cu λ_{p-1} și adunăm totul la coloana întâi obținem pe prima coloană numai zero de unde: $\lambda_0 \cdot D[f^0, \dots, f^{p-1}](0) = 0$ și deci $D[f^0, \dots, f^{p-1}](0) = 0.$

Reciproc, dacă $f^0, \dots, f^{p-1}$ sunt liniar independenți, sistemul:

$$\lambda_0 \cdot f^0(k) + \dots + \lambda_{p-1} \cdot f^{p-1}(k) = 0, k = 0, \dots, p-1$$

are numai soluția banală, de unde rezultă că determinantul său este nenul. Dar determinantul sistemului de mai sus este $D[f^0, \dots, f^{p-1}](0).$

■

2.1.9 Observație. Dacă putem determina p vectori liniar independenți $f^1, \dots, f^p \in V$ atunci soluția generală a recurenței omogene (RO) este:

$$f = c_1 \cdot f^1 + c_2 \cdot f^2 + \dots + c_p \cdot f^p, c_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, p.$$

Într-un caz particular, acela al ecuațiilor omogene cu coeficienți constanți, putem determina p vectori liniar independenți în V .

Ecuatii omogene cu coeficienți constanți

Fie $p \in \mathbb{N}^*, a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ cu $a_p \neq 0$; ecuația

$$(RO') \quad f(n+p) + a_1 \cdot f(n+p-1) + \dots + a_p \cdot f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

se numește recurență liniară omogenă cu coeficienți constanți; ea este asociată unei ecuații cu diferențe omogene cu coeficienți constanți de tipul:

$$(DO') \quad \Delta^p f(n) + b_1 \cdot \Delta^{p-1} f(n) + \dots + b_p \cdot \Delta^0 f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

unde $b_1, \dots, b_p \in \mathbb{R}$.

Căutăm pentru ecuația (RO') soluții de forma $f(n) = \lambda^n, n \in \mathbb{N}$; impunând ca f să verifice (RO') obținem:

$$(EC) \quad \boxed{\lambda^p + a_1 \cdot \lambda^{p-1} + \dots + a_p = 0.}$$

Ecuația (EC) se numește **ecuația caracteristică** atașată ecuației liniare omogene cu coeficienți constanți (RO'). Această ecuație admite p soluții reale sau complexe.

Vom studia pe rând cazurile ce pot apare.

I. Presupunem că ecuația (EC) admite rădăcini reale distincte $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

În acest caz, $\forall k = 1, \dots, p, f^k(n) = \lambda_k^n, n \in \mathbb{N}$, definesc p vectori liniar independenți în V . Într-adevăr, determinantul lui Casorati pentru această mulțime de vectori este

$$D[f^1, \dots, f^p](0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq k < l \leq p} (\lambda_l - \lambda_k) \neq 0.$$

Conform propoziției 2.1.8 $f^1, \dots, f^p$ formează o mulțime de vectori liniar independenți și deci soluția generală a recurenței omogene este:

$$f(n) = \sum_{k=1}^p c_k \cdot \lambda_k^n, n \in \mathbb{N}.$$

II. Să presupunem că rădăcinile $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sunt distincte dar că printre ele apare și o pereche complex conjugată: $\lambda_{1,2} = R \cdot e^{\pm i\alpha} = R(\cos \alpha \pm i \sin \alpha)$, unde $i = \sqrt{-1}$. În acest caz mulțimea $f^1(n) = R^n \cos n\alpha, f^2(n) = R^n \sin n\alpha, f^3(n) = \lambda_3^n, \dots, f^p(n) = \lambda_p^n$ este liniar independentă. Într-adevăr determinantul Casorati asociat acestei mulțimi este:

$$D[f^1, \dots, f^p](0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ R \cos \alpha & R \sin \alpha & \lambda_3 & \vdots & \lambda_p \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ R^{p-1} \cos (p-1)\alpha & R^{p-1} \sin (p-1)\alpha & \lambda_3^{p-1} & \vdots & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix}$$

În determinantul de mai sus înmulțim coloana a doua cu $i = \sqrt{-1}$ și adunăm la coloana întâi:

$$D[f^1, \dots, f^p](0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & R \sin \alpha & \lambda_3 & \dots & \lambda_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{p-1} & R^{p-1} \sin (p-1)\alpha & \lambda_3^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix}.$$

Înmulțim acum coloana a doua cu $-2i$ și adunăm la aceasta coloana întâi:

$$(-2i) \cdot D[f^1, \dots, f^p](0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq k < l \leq p} (\lambda_l - \lambda_k) \neq 0.$$

Propoziția 2.1.8 ne asigură astfel independența vectorilor; soluția generală va fi în acest caz:

$$f(n) = c_1 \cdot R^n \cos n\alpha + c_2 \cdot R^n \sin n\alpha + \sum_{k=3}^p c_k \cdot \lambda_k^n, n \in \mathbb{N}.$$

Dacă ecuația (EC) are mai multe perechi de rădăcini complex conjugate pentru fiecare pereche se procedează la fel.

III. Să considerăm acum cazul rădăcinilor multiple.

Dacă λ_1 este rădăcină multiplă de ordin s pentru ecuația caracteristică, trebuie să înlocuim în sistemul $\lambda_1^n = \lambda_2^n = \dots = \lambda_s^n, \lambda_{s+1}^n, \dots, \lambda_p^n$ primii s vectori (egali între ei) cu alții; să căutăm soluții noi de forma $f(n) = g(n) \cdot \lambda_1^n, n \in \mathbb{N}$. Înlocuind în ecuația caracteristică și simplificând prin λ_1^n obținem:

$$(1) \quad g(n+p) \cdot \lambda_1^p + a_1 \cdot g(n+p-1) \cdot \lambda_1^{p-1} + \dots + a_p \cdot g(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicăm acum șirului g relațiile (T) date în cadrul definiției 2.1.1 și obținem, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k = 0, \dots, p$,

$$g(n+k) = \sum_{j=0}^k C_k^j \Delta^j g(n).$$

Revenim cu aceste valori în relațiile (1)

$$\sum_{j=0}^p C_p^j \Delta^j g(n) \cdot \lambda_1^p + a_1 \sum_{j=0}^{p-1} C_{p-1}^j \Delta^j g(n) \cdot \lambda_1^{p-1} + \dots + a_p \sum_{j=0}^0 C_0^j \Delta^j g(n) = 0,$$

sau, după ce grupăm termenii:

$$(2) \quad (C_p^0 \lambda_1^p + a_1 C_{p-1}^0 \lambda_1^{p-1} + \dots + a_p) \cdot \Delta^0 g(n) + \\ + (C_p^1 \lambda_1^p + a_1 C_{p-1}^1 \lambda_1^{p-1} + \dots + a_{p-1} \lambda_1) \cdot \Delta^1 g(n) + \dots + \\ + (C_p^{p-1} \lambda_1^p + a_1 C_{p-1}^{p-1} \lambda_1^{p-1}) \cdot \Delta^{p-1} g(n) + C_p^p \lambda_1^p \cdot \Delta^p g(n) = 0.$$

Fie acum $P(\lambda) = \lambda^p + a_1 \lambda^{p-1} + \dots + a_p$ polinomul caracteristic; atunci relația (2) se rescrie:

$$(3) \quad P(\lambda_1) \cdot \Delta^0 g(n) + \lambda_1 P'(\lambda_1) \cdot \Delta^1 g(n) + \dots + \\ + \frac{\lambda_1^{p-1}}{(p-1)!} P^{(p-1)}(\lambda_1) \cdot \Delta^{p-1} g(n) + \frac{\lambda_1^p}{p!} P^{(p)}(\lambda_1) \cdot \Delta^p g(n) = 0.$$

Deoarece λ_1 este rădăcină multiplă de ordin s , $P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \dots = P^{(s-1)}(\lambda_1) = 0$ și atunci relația (3) devine:

$$(4) \quad \frac{\lambda_1^s}{s!} P^{(s)}(\lambda_1) \cdot \Delta^s g(n) + \frac{\lambda_1^{s+1}}{(s+1)!} P^{(s+1)}(\lambda_1) \cdot \Delta^{s+1} g(n) + \dots +$$

$$+\frac{\lambda_1^p}{p!}P^{(p)}(\lambda_1) \cdot \Delta^p g(n) = 0.$$

Relația (4) poate fi verificată identic dacă g este un polinom de grad mai mic decât s deoarece, în acest caz, diferențele finite ale lui g de ordin mai mare sau egal cu s sunt identic nule. În particular putem alege:

$$g_1(n) = 1, g_2(n) = n, \dots, g_s(n) = n^{s-1}.$$

În acest fel vom înlocui termenii egali $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_s^n$ cu șirurile: $\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \dots, n^{s-1}\lambda_1^n$.

Rămâne să demonstrăm liniara independență. Vom face acest lucru în cazul general al mai multor rădăcini multiple pentru ecuația caracteristică. Să presupunem că ecuația caracteristică (EC) admite rădăcinile multiple:

λ_1 cu ordinul de multiplicitate s_1 ,

λ_2 cu ordinul de multiplicitate s_2 ,

$\dots$

λ_q cu ordinul de multiplicitate s_q .

Evident că $s_1 + \dots + s_q = p$.

În locul fiecărei rădăcini multiple vom pune șiruri de tipul celor de mai sus și astfel obținem sistemul de soluții ale ecuației caracteristice:

$$(S) \quad \begin{cases} \lambda_1^n, n\lambda_1^n, \dots, n^{s_1-1}\lambda_1^n, \\ \lambda_2^n, n\lambda_2^n, \dots, n^{s_2-1}\lambda_2^n, \\ \dots \\ \lambda_q^n, n\lambda_q^n, \dots, n^{s_q-1}\lambda_q^n. \end{cases}$$

2.1.10 Teoremă. *Cele p soluții ale sistemului (S) de mai sus formează un sistem de vectori liniar independent în V .*

⊗ **Demonstrație.** Să considerăm o combinație liniară nulă a acestor p vectori:

$$(1) \quad (c_{11}\lambda_1^n + c_{21}n\lambda_1^n + \dots + c_{s_1 1}n^{s_1-1}\lambda_1^n) + \dots + \\ + (c_{1q}\lambda_q^n + c_{2q}n\lambda_q^n + \dots + c_{s_q q}n^{s_q-1}\lambda_q^n) = 0.$$

Vom ordona termenii ce apar în relația (1) după următoarele criterii:

Presupunem întâi că rădăcinile ecuației caracteristice sunt ordonate după mărimea modulului așa fel încât:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_q|.$$

Dacă avem rădăcini de modul maxim egal, să zicem

$$|\lambda_1| = \dots = |\lambda_r| = R > |\lambda_{r+1}| \geq \dots \geq |\lambda_q|$$

atunci primele le ordonăm după ordinul lor de multiplicitate, adică presupunem că:

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r.$$

Să presupunem și în acest caz că am putea avea ordine de multiplicitate maxime egale și să notăm:

$$s_1 = s_2 = \dots = s_t = s > s_{t+1} \geq \dots \geq s_r.$$

Vom spune că termenii $n^{s-1}\lambda_1^n, n^{s-1}\lambda_2^n, \dots, n^{s-1}\lambda_t^n$ sunt **dominanți** în relația (1).

Ideea de demonstrație este următoarea: vom arăta întâi că toți termenii dominanți din relația (1) au coeficienții nuli; apoi vom re-ordona relația (1), punând în evidență următorii termeni dominanți și vom repeta raționamentul până ce vom obține că toți coeficienții din relația (1) sunt nuli. De aici va rezulta că sistemul de vectori (S) este liniar independent.

Să observăm că un termen $n^k\lambda_j^n$ nu este dominant dacă: $j > r$ sau dacă $j \leq r$ și $k < s - 1$. Să observăm de asemenea că există un $n_0 \in \mathbb{N}$ așa fel încât pentru orice termen $n^k\lambda_j^n$ care nu este dominant:

$$(*) \quad \frac{|n^k\lambda_j^n|}{n^{s-1}R^n} \leq \frac{1}{n}, \forall n \geq n_0.$$

Într-adevăr, dacă $j > r$ $|\lambda_j| < R$ și deci

$$n \cdot \frac{|n^k\lambda_j^n|}{n^{s-1}R^n} = n^{k-s+2} \cdot \left(\frac{|\lambda_j|}{R}\right)^n \rightarrow 0$$

și deci putem găsi $n_0 \in \mathbb{N}$ așa fel încât

$$n \cdot \frac{|n^k\lambda_j^n|}{n^{s-1}R^n} = n^{k-s+2} \cdot \left(\frac{|\lambda_j|}{R}\right)^n < 1$$

ceea ce conduce imediat la relația (*); deoarece k și j parcurg mulțimi finite de valori n_0 se poate alege independent.

Dacă $j \leq r$ și $k < s - 1$ atunci $|\lambda_j| = R$ și deci

$$\frac{|n^k \lambda_j^n|}{n^{s-1} R^n} = \frac{n^k}{n^{s-1}} \leq \frac{n^{s-2}}{n^{s-1}} = \frac{1}{n}.$$

Astfel, (*) este demonstrată în toate cazurile posibile.

Să mai remarcăm că în relația (1) avem un număr finit de termeni și deci există un număr $M > 0$ așa fel încât:

$$(**) \quad |c_{kj}| \leq M, \forall j = 1, \dots, q, \forall k = 1, \dots, s_j.$$

Revenim la relația (1) unde păstrăm în primul membru doar termenii dominanți:

$$(2) \quad c_{s1} n^{s-1} \lambda_1^n + \dots + c_{st} n^{s-1} \lambda_t^n = - \left(\sum' c_{kj} n^k \lambda_j^n \right),$$

unde $\sum'$ indică suma tuturor termenilor din membrul întâi al relației (1) cu excepția celor dominanți.

Deoarece $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_t| = R$, rezultă că

$$\lambda_1 = R e^{i\alpha_1}, \lambda_2 = R e^{i\alpha_2}, \dots, \lambda_t = R e^{i\alpha_t},$$

unde $i = \sqrt{-1}$ iar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t \in [0, 2\pi)$ sunt distincte două câte două deoarece $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ sunt distincte două câte două.

Împărțim relația (2) cu $n^{s-1} R^n$

$$(3) \quad c_{s1} e^{i\alpha_1 n} + \dots + c_{st} e^{i\alpha_t n} = - \left(\sum' c_{kj} \frac{n^k \lambda_j^n}{n^{s-1} R^n} \right).$$

În relația (3) luăm în modul ambii termeni, majorăm modulul membrului doi cu suma modulelor și utilizând condițiile (*) și (**) obținem:

$$(4) \quad |c_{s1} e^{i\alpha_1 n} + \dots + c_{st} e^{i\alpha_t n}| \leq p \cdot \frac{M}{n}, \forall n \geq n_0.$$

Fie

$$D(n) = \begin{vmatrix} e^{i\alpha_1 n} & e^{i\alpha_2 n} & \dots & e^{i\alpha_t n} \\ e^{i\alpha_1(n+1)} & e^{i\alpha_2(n+1)} & \dots & e^{i\alpha_t(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{i\alpha_1(n+t-1)} & e^{i\alpha_2(n+t-1)} & \dots & e^{i\alpha_t(n+t-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{i\alpha_1 n} e^{i\alpha_2 n} \dots e^{i\alpha_t n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{i\alpha_1} & e^{i\alpha_2} & \dots & e^{i\alpha_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{i\alpha_1(t-1)} & e^{i\alpha_2(t-1)} & \dots & e^{i\alpha_t(t-1)} \end{vmatrix}.$$

Atunci

$$(5) \quad |D(n)| = \prod_{1 \leq j < k \leq t} |e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_j}|.$$

Cum $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ sunt distincte două câte două, se observă din (5) că $|D(n)|$ este un număr strict pozitiv independent de n .

Pe de altă parte dacă înmulțim prima coloană a determinantului $D(n)$ cu c_{s1} și apoi înmulțim coloana a doua a determinantului cu c_{s2} și o adunăm la prima, ... , coloana t cu c_{st} și o adunăm la coloana întâi obținem:

$$c_{s1} \cdot D(n) = \begin{vmatrix} A_1 & e^{i\alpha_2 n} & \dots & e^{i\alpha_t n} \\ A_2 & e^{i\alpha_2(n+1)} & \dots & e^{i\alpha_t(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_t & e^{i\alpha_2(n+t-1)} & \dots & e^{i\alpha_t(n+t-1)} \end{vmatrix},$$

unde, $\forall k = 1, \dots, t$, $A_k = c_{s1} \cdot e^{i\alpha_1(n+k-1)} + \dots + c_{st} \cdot e^{i\alpha_t(n+k-1)}$. Din relația (4) $|A_k| \leq \frac{pM}{n}$, $\forall n \geq n_0$ și, cum toate celelalte elemente ale determinantului de mai sus sunt în modul egale cu 1, obținem aplicând definiția determinantului:

$$|c_{s1}| \cdot |D(n)| \leq t! \cdot \frac{pM}{n}, \forall n \geq n_0.$$

Ținând cont de (5), $D(n)$ este constant și strict pozitiv și deci relația de mai sus poate avea loc doar dacă $c_{s1} = 0$.

Cu un raționament asemănător se demonstrează că și ceilalți coeficienți ai termenilor dominanți din (1) sunt nuli.

Așa cum am anunțat deja, termenii dominanți din (1) dispar și, printr-un proces de re-ordonare, găsim termenii dominanți dintre cei rămași; continuăm raționamentul până ce obținem toți coeficienții din relația (1) egali cu zero. ■

2.1.11 Observație. Dacă una dintre rădăcinile multiple este complexă atunci vom proceda ca în cazul II.

Să presupunem de exemplu că $\lambda_1 = R \cdot e^{i\alpha} = R(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, unde $i = \sqrt{-1}$ este multiplă de ordin s_1 ; atunci este evident că $\lambda_2 = R \cdot e^{-i\alpha} =$

$R(\cos \alpha - i \sin \alpha)$ va avea ordinul de multiplicitate $s_2 = s_1$. În acest caz primele două linii din sistemul de soluții (S) se vor înlocui cu

$$\begin{cases} R^n \cos n\alpha, nR^n \cos n\alpha, \dots, n^{s_1-1} R^n \cos n\alpha, \\ R^n \sin n\alpha, nR^n \sin n\alpha, \dots, n^{s_2-1} R^n \sin n\alpha. \end{cases}$$

Ecuatii liniare neomogene

2.1.12 Propoziție. *Fie recurența liniară neomogenă:*

$$(R) \quad f(n+p) + a_1(n) \cdot f(n+p-1) + \dots + a_p(n) \cdot f(n) = a(n), \forall n \in \mathbb{N}$$

și recurența liniară omogenă asociată ei:

$$(RO) \quad f(n+p) + a_1(n) \cdot f(n+p-1) + \dots + a_p(n) \cdot f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N};$$

dacă $f^1, \dots, f^p$ sunt p soluții liniar independente ale ecuației omogene (RO) și dacă f^ este o soluție particulară a ecuației neomogene (R), atunci soluția generală a ecuației (R) este*

$$f = c_1 \cdot f^1 + \dots + c_p \cdot f^p + f^*, c_k \in \mathbb{R}, \forall k = 1, \dots, p.$$

Demonstrație.

Este evident că, $\forall c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^p c_k \cdot f^k + f^*$ verifică ecuația (R).

Fie acum f o soluție arbitrară a ecuației (R); atunci, deoarece f^* este și ea soluție pentru (R),

$$(1) \quad f(n+p) + a_1(n) \cdot f(n+p-1) + \dots + a_p(n) \cdot f(n) = a(n), \forall n \in \mathbb{N},$$

$$(2) \quad f^*(n+p) + a_1(n) \cdot f^*(n+p-1) + \dots + a_p(n) \cdot f^*(n) = a(n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Scădem (2) din (1) și obținem:

$$(f - f^*)(n+p) + a_1(n) \cdot (f - f^*)(n+p-1) + \dots + a_p(n) \cdot (f - f^*)(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deci $f - f^*$ este soluție pentru ecuația (RO) și astfel există $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$ a.î. $(f - f^*) = \sum_{k=1}^p c_k \cdot f^k$ de unde $f = \sum_{k=1}^p c_k \cdot f^k + f^*$. ■

Rezultă din propoziția precedentă că pentru a rezolva o recurență liniară neomogenă este suficient să găsim o soluție particulară a ei (bineînțeleasă în ipoteza că putem rezolva ecuația omogenă asociată).

Metoda de a găsi o astfel de soluție particulară este **metoda variației constantelor** sau metoda lui Lagrange.

Să presupunem că $f^1, \dots, f^p$ sunt p soluții liniar independente ale ecuației omogene (RO); știm că soluția generală a ecuației omogene este $\sum_{k=1}^p c_k \cdot f^k$.

Vom căuta o soluție particulară a ecuației neomogene (R) considerând că $c_1, \dots, c_p$ de mai sus nu sunt constante ci șiruri pe care urmează să le determinăm.

Deci încercăm să determinăm o soluție particulară a ecuației omogene de forma

$$f^*(n) = \sum_{k=1}^p c_k(n) \cdot f^k(n), n \in \mathbb{N}.$$

Pentru a determina cele p șiruri necunoscute $c_1(n), \dots, c_p(n)$ vom impune lui f^* să verifice ecuația (R) și vom adăuga $p - 1$ condiții suplimentare care vor conduce la următorul sistem compatibil:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \sum_{k=1}^p c_k(n+p)f^k(n+p) + a_1(n) \sum_{k=1}^p c_k(n+p-1)f^k(n+p-1) + \\ \quad + \dots + a_p(n) \sum_{k=1}^p c_k(n)f^k(n) = a(n) \\ (2) \sum_{k=1}^p c_k(n+1)f^k(n+1) = \sum_{k=1}^p c_k(n)f^k(n+1) \\ (3) \sum_{k=1}^p c_k(n+2)f^k(n+2) = \sum_{k=1}^p c_k(n)f^k(n+2) \\ \dots \\ (p) \sum_{k=1}^p c_k(n+p-1)f^k(n+p-1) = \sum_{k=1}^p c_k(n)f^k(n+p-1). \end{array} \right.$$

Vom rezolva acest sistem transformându-l într-unul de ecuații cu diferențe.

Întâi în ecuația (p) trecem $n \mapsto n+1$ și vom obține primul termen din ecuația (1):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p c_k(n+p)f^k(n+p) &= \sum_{k=1}^p c_k(n+1)f^k(n+p) = \\ &= \sum_{k=1}^p \Delta c_k(n)f^k(n+p) + \sum_{k=1}^p c_k(n)f^k(n+p). \end{aligned}$$

Termenii următori ai ecuației (1) se modifică corespunzător cu ajutorul ecuațiilor (p), ($p-1$), $\dots$, (2) în această ordine și obținem:

$$\sum_{k=1}^p \Delta c_k(n)f^k(n+p) + \sum_{k=1}^p c_k(n)f^k(n+p) + a_1(n) \sum_{k=1}^p c_k(n)f^k(n+p-1) +$$

$$+ \cdots + a_p(n) \sum_{k=1}^p c_k(n) f^k(n) = a(n),$$

sau

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^p \Delta c_k(n) f^k(n+p) + \\ & + \sum_{k=1}^p c_k(n) [f^k(n+p) + a_1(n) f^k(n+p-1) + \cdots + a_p(n) f^k(n)] = a(n). \end{aligned}$$

Deoarece $f^1, \dots, f^p$ sunt soluții ale ecuației omogene (RO), parantezele pătrate din relația de mai sus se anulează și astfel ecuația (1) devine:

$$(1') \quad \sum_{k=1}^p \Delta c_k(n) f^k(n+p) = a(n).$$

Ecuația (2) se rescrie:

$$(2') \quad \sum_{k=1}^p \Delta c_k(n) f^k(n+1) = 0.$$

Dacă în ecuația (2) trecem $n \mapsto n+1$ și înlocuim în ecuația (3) obținem:

$$(3') \quad \sum_{k=1}^p \Delta c_k(n) f^k(n+2) = 0.$$

Apoi vom trece în ecuația (3) pe n în $n+1$ și vom înlocui în ecuația (4) pentru a obține:

$$(4') \quad \sum_{k=1}^p \Delta c_k(n) f^k(n+3) = 0,$$

...

$$(p') \quad \sum_{k=1}^p \Delta c_k(n) f^k(n+p-1) = 0.$$

În sfârșit rescriem sistemul de mai sus plasând ecuația (1') pe ultimul loc:

$$(S) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^p \Delta c_k(n) f^k(n+1) = 0 \\ \sum_{k=1}^p \Delta c_k(n) f^k(n+2) = 0 \\ \sum_{k=1}^p \Delta c_k(n) f^k(n+3) = 0 \\ \dots \\ \sum_{k=1}^p \Delta c_k(n) f^k(n+p-1) = 0 \\ \sum_{k=1}^p \Delta c_k(n) f^k(n+p) = a(n). \end{cases}$$

Sistemul (S) are p ecuații cu p necunoscute: $\Delta c_1(n), \dots, \Delta c_p(n)$. Determinantul sistemului este determinantul lui Casorati $D[f^1, \dots, f^p](n+1)$ asociat sistemului de p vectori liniar independenți în spațiul vectorial al soluțiilor ecuației omogene (RO); după propoziția 2.1.8 acesta este nenul și astfel sistemul (S) admite soluție unică: $\Delta c_1(n), \dots, \Delta c_p(n)$, unde, $\forall k = 1, \dots, p$,

$$\Delta c_k(n) = \frac{\begin{vmatrix} f^1(n+1) & \vdots & f^{k-1}(n+1) & 0 & f^{k+1}(n+1) & \vdots & f^p(n+1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f^1(n+p) & \vdots & f^{k-1}(n+p) & a(n) & f^{k+1}(n+p) & \vdots & f^p(n+p) \end{vmatrix}}{D[f^1, \dots, f^p](n+1)}$$

sau

$$\Delta c_k(n) = (-1)^{p+k} a(n) \frac{D_k(n)}{D(n)},$$

unde am notat cu $D(n) = D[f^1, \dots, f^p](n+1)$ și cu $D_k(n) =$

$$= \begin{vmatrix} f^1(n+1) & \vdots & f^{k-1}(n+1) & f^{k+1}(n+1) & \vdots & f^p(n+1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f^1(n+p-1) & \vdots & f^{k-1}(n+p-1) & f^{k+1}(n+p-1) & \vdots & f^p(n+p-1) \end{vmatrix}$$

Putem atunci determina, până la o constantă aditivă, șirurile necunoscute $c_1(n), \dots, c_p(n)$; astfel, $\forall k = 1, \dots, p, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_k(n) = c_k(0) + \sum_{l=0}^{n-1} \Delta c_k(l) = c_k(0) + (-1)^{p+k} \sum_{l=0}^{n-1} a(l) \frac{D_k(l)}{D(l)}.$$

O soluție particulară pentru ecuația neomogenă (R) va fi deci:

$$\sum_{k=1}^p c_k(n) \cdot f^k(n) = \sum_{k=1}^p c_k(0) f^k(n) + \sum_{k=1}^p (-1)^{p+k} \left(\sum_{l=0}^{n-1} a(l) \frac{D_k(l)}{D(l)} \right) f^k(n)$$

dar, deoarece $\sum_{k=1}^p c_k(0)f^k(n)$ este soluție a ecuației omogene, putem să luăm ca soluție particulară:

$$f^*(n) = \sum_{k=1}^p (-1)^{p+k} \left(\sum_{l=0}^{n-1} a(l) \frac{D_k(l)}{D(l)} \right) f^k(n).$$

Atunci, după propoziția 2.1.12, soluția generală a ecuației neomogene este:

$$f(n) = \sum_{k=1}^p c_k f^k(n) + \sum_{k=1}^p (-1)^{p+k} \left(\sum_{l=0}^{n-1} a(l) \frac{D_k(l)}{D(l)} \right) f^k(n).$$

2.1.13 Observații. (i) Metoda variației constantelor se poate aplica cu succes în cazul ecuațiilor liniare neomogene ale căror ecuații omogene asociate au coeficienți constanți. Într-adevăr, în acest caz, ecuația caracteristică asociată ecuației omogene permite găsirea unui sistem liniar independent de soluții pentru ecuația omogenă și deci găsirea unei soluții particulare a ecuației neomogene.

(ii) Din punct de vedere practic, metoda variației constantelor este destul de dificil de aplicat. În anumite cazuri particulare vom putea găsi mai ușor soluții particulare.

2.1.14 Teoremă. *Fie recurența liniară neomogenă cu coeficienți constanți:*

$$f(n+p) + a_1 \cdot f(n+p-1) + \dots + a_p \cdot f(n) = Q(n)e^{\alpha n}, \forall n \in \mathbb{N},$$

unde Q este un polinom de grad q iar $\alpha \in \mathbb{R}$; fie

$$C(\lambda) = \lambda^p + a_1 \lambda^{p-1} + \dots + a_p$$

polinomul caracteristic asociat ecuației omogene

$$f(n+p) + a_1 \cdot f(n+p-1) + \dots + a_p \cdot f(n) = 0.$$

Atunci o soluție particulară a ecuației neomogene este de forma

$$f^*(n) = R(n)e^{\alpha n},$$

unde R este un polinom de grad $r = q + s$, s fiind ordinul de multiplicitate al rădăcinii e^α pentru polinomul C (dacă e^α nu este rădăcină pentru C , $s = 0$).

⊙ **Demonstrație.** Încercăm, pentru ecuația neomogenă, o soluție particulară de forma $f^*(n) = R(n)e^{\alpha n}$, unde R este un polinom de grad r ce urmează a fi determinat. Punând condiția ca ecuația neomogenă să fie verificată de f^* obținem:

$$(1) \quad R(n+p)e^{\alpha(n+p)} + a_1 R(n+p-1)e^{\alpha(n+p-1)} + \dots + a_p R(n)e^{\alpha n} = Q(n)e^{\alpha n}.$$

Simplificăm relația (1) cu $e^{\alpha n}$ și obținem:

$$(2) \quad R(n+p)e^{\alpha p} + a_1 R(n+p-1)e^{\alpha(p-1)} + \dots + a_p R(n) = Q(n).$$

În relația (2) înlocuim, $\forall k = 0, \dots, p$,

$$R(n+k) = \sum_{j=0}^k C_k^j \Delta^j R(n) \text{ (vezi relațiile (T) de la definiția 2.1.1),}$$

$$(3) \quad \sum_{j=0}^p C_p^j \Delta^j R(n) e^{\alpha p} + a_1 \sum_{j=0}^{p-1} C_{p-1}^j \Delta^j R(n) e^{\alpha(p-1)} + \dots + a_p \sum_{j=0}^0 C_0^j \Delta^j R(n) = Q(n).$$

Dacă în (3) re-ordonăm termenii obținem:

$$(4) \quad (C_p^0 e^{\alpha p} + a_1 C_{p-1}^0 e^{\alpha(p-1)} + \dots + a_p C_p^0) \Delta^0 R(n) + \\ + (C_p^1 e^{\alpha p} + a_1 C_{p-1}^1 e^{\alpha(p-1)} + \dots + a_{p-1} C_1^1 e^{\alpha}) \Delta^1 R(n) + \\ + \dots + (C_p^k e^{\alpha p} + a_1 C_{p-1}^k e^{\alpha(p-1)} + \dots + a_{p-k} C_k^k e^{\alpha k}) \Delta^k R(n) + \\ + \dots + (C_p^{p-1} e^{\alpha p} + a_1 C_{p-1}^{p-1} e^{\alpha(p-1)}) \Delta^{p-1} R(n) + C_p^0 e^{\alpha p} \Delta^p R(n) = Q(n).$$

Dacă ținem cont de forma polinomului caracteristic $C(\lambda)$ și a derivatelor sale putem re-scrie relația (4)

$$(5) \quad C(e^\alpha) \Delta^0 R(n) + C'(e^\alpha) e^\alpha \Delta^1 R(n) + \dots + \frac{1}{k!} C^{(k)}(e^\alpha) e^{\alpha k} \Delta^k R(n) +$$

$$+ \dots + \frac{1}{p!} C^{(p)}(e^\alpha) e^{\alpha p} \Delta^p R(n) = Q(n).$$

Deoarece e^α este rădăcină multiplă de ordin s pentru polinomul C , $C(e^\alpha) = C'(e^\alpha) = \dots = C^{(s-1)}(e^\alpha) = 0$ și deci din (5) rămâne

$$(6) \quad \frac{1}{s!} C^{(s)}(e^\alpha) e^{\alpha s} \Delta^s R(n) + \dots + \frac{1}{p!} C^{(p)}(e^\alpha) e^{\alpha p} \Delta^p R(n) = Q(n).$$

În relația (6) $\Delta^s R(n), \dots, \Delta^p R(n)$ sunt polinoame de grad respectiv $r - s, \dots, r - p$ și deci pentru a putea identifica coeficienții lui R trebuie ca $r - s = q$ sau $r = q + s$. Să mai remarcăm că, dacă înlocuim în (6) $R(n) = \sum_{j=0}^p A_j n^{p-j}$ atunci $\Delta^s R(n) = \Delta^s \left(\sum_{j=0}^{p-s} A_j n^{p-j} \right)$ și deci în membrul stâng

al relației (6) rămân $q + 1$ necunoscute care urmează a fi determinate prin identificarea coeficienților cu acei ai polinomului Q . ■

2.1.15 Observații. (i) Rezultă din demonstrația de mai sus că polinomul necunoscut R trebuie căutat de forma $R(n) = A_0 n^{q+s} + A_1 n^{q+s-1} + \dots + A_q n^s$.

În cazul în care e^α nu este rădăcină a polinomului C , $s = 0$ și deci R va fi un polinom de același grad cu Q .

(ii) Dacă căutăm o soluție particulară pentru ecuația neomogenă

$$f(n+p) + a_1 \cdot f(n+p-1) + \dots + a_p \cdot f(n) = Q(n), \forall n \in \mathbb{N},$$

unde Q este un polinom de grad q , atunci putem aplica rezultatul din teorema precedentă cu $\alpha = 0$. Concluzia este că soluția particulară trebuie căutată sub forma unui polinom de grad q dacă 1 nu este soluție a ecuației caracteristice.

Dacă 1 este rădăcină multiplă de ordin S a ecuației caracteristice atunci soluția particulară Q trebuie căutată de forma:

$$R(n) = A_0 n^{q+s} + A_1 n^{q+s-1} + \dots + A_q n^s.$$

2.2 Media aritmetico-geometrică

Algoritmul dublu format din media aritmetică și media geometrică (algoritmul (A,G)) este unul dintre cei mai importanți algoritmi neliniari; legăturile

sale cu una dintre cele mai profunde teorii, aceea a funcțiilor și integralelor eliptice, ne-au determinat să-i dedicăm această secțiune.

Media aritmetico – geometrică a apărut într-un memoriu al lui Lagrange publicat în 1784 – 1785. Adolescent fiind, Gauss redescoperă algoritmul. Contribuția sa majoră, care include o reprezentare integrală elegantă a limitei, a fost făcută, însă, cu 7-9 ani mai târziu. În 1816, Gauss arată, într-o scrisoare adresată lui H.C. Schumacher, că a descoperit independent media aritmetico – geometrică în 1791, la vârsta de 14 ani. La vârsta de 22-23 de ani, Gauss a scris o lucrare în care descrie descoperirile sale cu privire la media aritmetică geometrică. Această lucrare nu a fost publicată decât după moartea sa, ca de altfel multe alte lucrări ale lui. În mod evident Gauss a acordat o importanță deosebită algoritmului (A, G) mărturie stând numeroasele referiri făcute în jurnalul său în perioada 1799 – 1800. Unele referiri sunt destul de vagi și este foarte posibil să nu fi aflat încă totul despre descoperirile lui Gauss în această privință.

Prezentăm teorema lui Gauss cu două demonstrații; una aparține lui Gauss iar cealaltă este demonstrația lui Legendre care utilizează transformarea Landen.

Presupunem că $a > b > 0$; algoritmul mediilor aritmetico-geometrice este:

$$(A - G) \quad \begin{cases} a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \\ b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \end{cases}, n \geq 1, a_0 = a, b_0 = b.$$

Folosind inegalitatea cunoscută dintre media geometrică și cea aritmetică se poate ușor arăta că, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$0 < b = b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n \leq a_n \leq \dots \leq a_1 \leq a_0 = a.$$

Rezultă de aici că șirurile $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ sunt convergente și, trecând la limită în una dintre relațiile de recurență de mai sus, obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Valoarea comună a celor două limite se notează cu $M(a, b)$, marcând faptul că ea depinde de valorile inițiale a și b ; $M(a, b)$ se va numi **media aritmetico-geometrică a numerelor a și b** .

Gauss dă patru exemple numerice prin care probează viteza mare de convergență a algoritmului mediilor aritmetico-geometrice; prezentăm doar unul dintre acestea:

Fie $a = 1$ și $b = 0,8$; atunci:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0,9 \\
a_2 &= 0, \underline{897213595499957939282}\dots \\
a_3 &= 0, \underline{897211432116346}\dots \\
a_4 &= 0, \underline{897211432115042}\dots \\
&\dots\dots \\
b_1 &= 0,8944271909999158785654\dots \\
b_2 &= 0, \underline{897209268732734}\dots \\
b_3 &= 0, \underline{897211432113738}\dots \\
b_4 &= 0, \underline{897211432115042}\dots
\end{aligned}$$

Propoziția de mai jos pune în evidență o formulă de calcul a erorii care ilustrează viteza mare de convergență a acestui algoritm.

2.2.1 Propoziție. Fie $a > b > 0$; șirurile (a_n) și (b_n) generate de algoritmul $(A - G)$ verifică relația:

$$(*) \quad a_n - b_n \leq 8b \cdot \left(\frac{a-b}{8b} \right)^{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație. Fie $n \in \mathbb{N}^*$; atunci

$$\begin{aligned}
a_n - b_n &= \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - \sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}} = \frac{(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2}{2} = \\
&= \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{2(\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}})^2} \leq \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{2 \cdot 2^2 \cdot b},
\end{aligned}$$

de unde

$$(1) \quad a_n - b_n \leq \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{8b}.$$

În relația (1) trecem $n \mapsto n-1$ și obținem:

$$(2) \quad a_{n-1} - b_{n-1} \leq \frac{(a_{n-2} - b_{n-2})^2}{8b}, n \geq 2.$$

Din relațiile (1) și (2) obținem prin iterații repetate:

$$\begin{aligned}
a_n - b_n &\leq \frac{(a_{n-2} - b_{n-2})^{2^2}}{(8b) \cdot (8b)^2} \leq \frac{(a_{n-3} - b_{n-3})^{2^3}}{(8b) \cdot (8b)^2 \cdot (8b)^{2^2}} \leq \dots \leq \frac{(a-b)^{2^n}}{(8b)^{1+2+2^2+\dots+2^{n-1}}} = \\
&= 8b \cdot \left(\frac{a-b}{8b} \right)^{2^n}.
\end{aligned}$$

■

2.2.2 Observații. (i) Este evident că media aritmetico-geometrică este o funcție simetrică:

$$M(a, b) = M(b, a), \forall a, b > 0.$$

(ii) Dacă presupunem că pornim algoritmul cu (a_1, b_1) în loc de (a, b) , cum toți termenii $(a_n, b_n), n \geq 1$, rămân neschimbați, rezultă că $M(a, b) = M(a_1, b_1)$. Deci

$$M(a, b) = M\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right), \forall a, b > 0.$$

(iii) Să presupunem că plecăm cu valorile inițiale $a' = c \cdot a$ și $b' = c \cdot b$, unde c este un număr strict pozitiv fixat; atunci

$$a'_1 = c \cdot a_1, b'_1 = c \cdot b_1, \dots, a'_n = c \cdot a_n, b'_n = c \cdot b_n, \dots$$

Rezultă că

$$M(c \cdot a, c \cdot b) = c \cdot M(a, b), \forall c > 0.$$

Pentru a putea obține o reprezentare integrală a mediei aritmetico-geometrice vom defini integralele eliptice complete de prima specie.

2.2.3 Definiție. Integrala

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 t}}, |x| < 1$$

se numește integrala eliptică completă de prima specie.

În teorema următoare dăm reprezentarea integrală a lui Gauss pentru $M(1+x, 1-x)$.

2.2.4 Teoremă (Gauss – 1799, publicată în 1818).

$$M(1+x, 1-x) = \frac{\pi}{2 \cdot K(x)} = \frac{\pi}{2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 t}}}, \forall x \in (-1, 1).$$

În cele ce urmează vom prezenta două demonstrații diferite ale teoremei 2.2.4.

⊖ Demonstrația lui Gauss

Funcția M fiind simetrică (vezi punctul (i) din 2.2.2),

$$M(1 + (-x), 1 - (-x)) = M(1 - x, 1 + x) = M(1 + x, 1 - x)$$

deci M este o funcție pară de x . Putem atunci presupune că

$$(1) \quad \frac{1}{M(1 + x, 1 - x)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{2k}.$$

Facem substituția $x = \frac{2t}{1 + t^2}$. Din 2.2.2 obținem că:

$$\begin{aligned} M(1 + x, 1 - x) &= M\left(1 + \frac{2t}{1 + t^2}, 1 - \frac{2t}{1 + t^2}\right) = M\left(\frac{(1 + t)^2}{1 + t^2}, \frac{(1 - t)^2}{1 + t^2}\right) \\ &= \frac{1}{1 + t^2} M((1 + t)^2, (1 - t)^2) = \\ &= \frac{1}{1 + t^2} \cdot M\left(\frac{(1 + t)^2 + (1 - t)^2}{2}, \sqrt{((1 + t)^2 (1 - t)^2)}\right) = \\ &= \frac{1}{1 + t^2} \cdot M(1 + t^2, 1 - t^2) \end{aligned}$$

Înlocuind în (1), obținem:

$$\frac{1 + t^2}{M(1 + t^2, 1 - t^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{2t}{1 + t^2}\right)^{2k}, \text{ de unde, utilizând din nou (1),}$$

obținem relația

$$(1 + t^2) \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^{4k} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{2t}{1 + t^2}\right)^{2k} \text{ sau}$$

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^{4k} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k 2^{2k} t^{2k} (1 + t^2)^{-2k-1}.$$

Reamintim formula seriei binomiale:

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in (-1, 1).$$

$$\begin{aligned} \text{Deci: } (1+t^2)^{-2k-1} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2k+1)(2k+2)\dots(2k+n)}{n!} (-1)^n t^{2n} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2k+n}^n (-1)^n t^{2n}. \end{aligned}$$

Revenind în relația (2) obținem:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^{4k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[A_k 2^{2k} t^{2k} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_{2k+n}^n t^{2n} \right) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[A_k 2^{2k} t^{2k} (1 - C_{2k+1}^1 t^2 + C_{2k+2}^2 t^4 + \dots + (-1)^n C_{2k+n}^n t^{2n} + \dots) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [A_k 2^{2k} t^{2k} - C_{2k+1}^1 A_k 2^{2k} t^{2k+2} + \dots + (-1)^n C_{2k+n}^n A_k 2^{2k} t^{2k+2n} + \dots] = \\ &= (A_0 - A_0 t^2 + A_0 t^4 - A_0 t^6 + \dots + (-1)^n A_0 t^{2n} + \dots) + \\ &+ (A_1 2^2 t^2 - C_3^1 A_1 2^2 t^4 + C_4^2 A_1 2^2 t^6 + \dots + (-1)^n A_1 C_{n+2}^n 2^2 t^{2n+2} + \dots) + \\ &+ (A_2 2^4 t^4 - C_5^1 A_2 2^4 t^6 + C_6^2 A_2 2^4 t^8 + \dots + (-1)^n C_{n+4}^n A_2 2^4 t^{2n+4} + \dots) + \dots \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} (3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^{4k} &= A_0 + (-A_0 + 2^2 A_1) t^2 + (A_0 - C_3^1 2^2 A_1 + 2^4 A_2) \cdot t^4 + \\ &+ (-A_0 + C_4^2 A_1 2^2 - C_5^1 A_2 2^4 + A_3 2^6) \cdot t^6 + \dots \end{aligned}$$

În relația (1) facem $x = 0$,

$$A_0 = \frac{1}{M(1,1)} = 1.$$

Identificăm apoi coeficienții în relația (3) și obținem:

$$0 = -A_0 + 2^2 A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$A_1 = A_0 - C_3^1 2^2 A_1 + 2^4 A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{9}{2^6} = \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2$$

$$0 = -A_0 + C_4^2 A_1 2^2 - C_5^1 A_2 2^4 + A_3 2^6 \Rightarrow A_3 = \frac{25}{2^8} = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2$$

În mod analog obținem

$$A_k = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} \right]^2, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Revenind la relația (1) obținem

$$\frac{1}{M(1+x, 1-x)} = 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 x^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 x^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 x^6 + \dots$$

sau

$$(4) \quad \frac{1}{M(1+x, 1-x)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} \right]^2 \cdot x^{2k}.$$

Dezvoltăm acum în serie integrala $K(x)$.

Pentru aceasta vom dezvolta integrantul lui $K(x)$ în serie binomială și vom integra termen cu termen seria astfel obținută.

$$\begin{aligned} (1 - x^2 \sin^2 t)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) (-x^2 \sin^2 t) + \frac{\left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} - 1 \right)}{2!} x^4 \sin^4 t + \dots + \\ &+ \frac{\left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(-\frac{1}{2} - 1 - k \right)}{k!} (-1)^k x^{2k} \sin^{2k} t + \dots = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2} \right)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{k!} (-1)^k x^{2k} \sin^{2k} t = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k k!} x^{2k} \sin^{2k} t. \end{aligned}$$

Deci, integrând seria de mai sus :

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_0^{\pi/2} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} \sin^{2k} t \right] dt = \\ &= \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} \sin^{2k} t dt \end{aligned}$$

sau

$$(5) \quad K(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} t dt.$$

Să calculăm acum

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \int_0^{\pi/2} (-\cos t) \sin^{n-1} t dt = \\ &= -\cos t \sin^{n-1} t \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^{n-2} t dt = \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \sin^{n-2} t dt = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

Deci :

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \Rightarrow n I_n = (n-1) I_{n-2} \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \text{ și } I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t dt = -\cos t \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

Deci avem:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} I_0, \\ I_4 &= \frac{3}{4} I_2, \\ I_6 &= \frac{5}{6} I_4, \\ &\dots\dots\dots \\ I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}. \\ I_3 &= \frac{2}{3} I_1, \\ I_5 &= \frac{4}{5} I_3, \end{aligned}$$

$$I_7 = \frac{6}{7} I_5,$$

.....

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$$

de unde

$$I_{2n+1} = \frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1} I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Am obținut că:

$$I_{2k} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} t dt = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}$$

Așadar, revenind la (5):

$$K(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \frac{[(2k-1)!!]^2}{[2k!!]^2} x^{2k}$$

Deci, din (4)

$$K(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(1+x, 1-x)}$$

sau

$$M(1+x, 1-x) = \frac{\pi}{2K(x)}.$$

■

⊖ Demonstrația lui Legendre

Această demonstrație a fost obținută de Legendre în 1825 utilizând o idee a matematicianului englez Landen (1719 – 1790).

Fie $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ șirurile mediilor aritmetice, respectiv geometrice, care converg la limita comună $M(a, b)$ și fie, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{\sqrt{a_n^2 - b_n^2}}{a_n}$; atunci

$x_n \rightarrow 0$. În plus, $x_0 = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = x$ (vezi demonstrația corolarului 2.2.6) iar, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(1) \quad x_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2}}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^2 - a_n b_n}}{\frac{a_n+b_n}{2}} = \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n}$$

În integrala eliptică completă de ordinul întâi $K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 t}}$ facem substituția:

$$(2) \quad \operatorname{tg} s = \frac{\sin 2t}{x_1 + \cos 2t},$$

substituție numită transformarea Landen $\left(\text{aici } x_1 = \frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a_1} = \frac{a-b}{a+b} \right)$.

Diferențiind relația (2) obținem:

$$(3) \quad \frac{ds}{\cos^2 s} = \frac{2(1+x_1 \cos 2t)}{(x_1 + \cos 2t)^2} dt.$$

Să calculăm acum

$$\frac{ds}{\sqrt{1-x_1^2 \sin^2 s}} = \frac{\cos^2 s}{\sqrt{1-x_1^2 \sin^2 s}} \cdot \frac{ds}{\cos^2 s}.$$

Din (3) obținem

$$\begin{aligned} \frac{ds}{\sqrt{1-x_1^2 \sin^2 s}} &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 s} \cdot \sqrt{1+(1-x_1^2)\operatorname{tg}^2 s}} \cdot \frac{2(1+x_1 \cos 2t)}{(x_1 + \cos 2t)^2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 2t}{(x_1+\cos 2t)^2}} \cdot \sqrt{1+(1-x_1^2)\frac{\sin^2 2t}{(x_1+\cos 2t)^2}}} \cdot \frac{2(1+x_1 \cos 2t)}{(x_1 + \cos 2t)^2} dt = \\ &= \frac{2dt}{\sqrt{(x_1+1)^2 - 2x_1 \cdot 2 \sin^2 t}} = \frac{2dt}{(x_1+1) \cdot \sqrt{1-\frac{4x_1}{(x_1+1)^2} \sin^2 t}}. \end{aligned}$$

Din relația (1) obținem

$$\frac{4x_1}{(x_1+1)^2} = \frac{4\frac{a-b}{a+b}}{\left(\frac{a-b}{a+b}+1\right)^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2} = x^2$$

Înlocuind în relația de mai sus obținem

$$\frac{ds}{\sqrt{1-x_1^2 \sin^2 s}} = \frac{2dt}{(x_1+1) \cdot \sqrt{1-x^2 \sin^2 t}}$$

sau

$$(4) \quad \frac{dt}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 t}} = \frac{x_1+1}{2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{1-x_1^2 \sin^2 s}}.$$

Deoarece $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $2t \in [0, \pi]$ și deci există un $t_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ unic așa încât $\cos 2t_0 = -x_1$. Atunci:

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 t}} = \int_0^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 t}} + \int_{t_0}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 t}}$$

Observăm că atunci când $t \uparrow t_0$, $\cos 2t \downarrow \cos 2t_0 = -x_1 \Rightarrow \operatorname{tg} s = \frac{\sin 2t}{x_1 + \cos 2t} \rightarrow +\infty \Rightarrow s \rightarrow \frac{\pi}{2}$ iar atunci când $t \downarrow t_0$, $\cos 2t \uparrow \cos 2t_0 = -x_1 \Rightarrow \operatorname{tg} s = \frac{\sin 2t}{x_1 + \cos 2t} \rightarrow -\infty \Rightarrow s \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.

Deci:

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{1+x_1}{2} \frac{ds}{\sqrt{1-x_1^2 \sin^2 s}} + \int_{-\pi/2}^0 \frac{1+x_1}{2} \frac{ds}{\sqrt{1-x_1^2 \sin^2 s}} = \\ &= \frac{1+x_1}{2} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{1-x_1^2 \sin^2 s}} = (x_1+1) \cdot K(x_1). \end{aligned}$$

După n iterații deducem că:

$$(5) \quad K(x) = (1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n) K(x_n).$$

Utilizând din nou relația (1) obținem $1+x_k = \frac{2a_{k-1}}{a_{k-1}+b_{k-1}} = \frac{a_{k-1}}{a_k}$ și atunci relația (5) se scrie

$$(6) \quad K(x) = \frac{a}{a_n} \cdot K(x_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trecând la limită în relația (6) obținem

$$K(x) = \frac{a}{M(a,b)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

care, în baza celor observate în demonstrația corolarului 2.2.6, reprezintă chiar concluzia teoremei 3.1.11. ■

2.2.5 Observație. Transformarea Landen a fost introdusă în anul 1771. Există mai multe versiuni de transformări Landen. Cel mai adesea, transformarea Landen este exprimată printr-o egalitate între două diferențiale de forma relației (4) din demonstrația precedentă.

Rezultatul din teorema 2.2.4 permite obținerea lui $M(a, b)$ oricare ar fi numerele pozitive a și b .

2.2.6 Corolar.

$$M(a, b) = \frac{\pi}{2 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}}, \forall a, b > 0.$$

Demonstrație. Fie

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^{\pi/2} (a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Observăm că

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^{\pi/2} (a^2 (1 - \sin^2 t) + b^2 \sin^2 t)^{-\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} a [a^2 (1 - \sin^2 t) + b^2 \sin^2 t]^{-\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{a^2 - a^2 \sin^2 t + b^2 \sin^2 t}{a^2} \right]^{-\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t \right]^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} [1 - x^2 \sin^2 t]^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{a} K(x), \end{aligned}$$

unde $x = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Pe de altă parte, ținând cont de punctele (ii) și (iii) ale observației 2.2.2,

$$\begin{aligned}
M(1+x, 1-x) &= M\left(1 + \frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}, 1 - \frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}\right) = \\
&= M\left(\frac{1 + \frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2} + 1 - \frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}}{2}, \sqrt{\left(1 + \frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(1 - \frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}\right)}\right) = \\
&= M\left(1, \sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}}\right) = M\left(1, \sqrt{\frac{b^2}{a^2}}\right) = \\
&= M\left(1, \frac{b}{a}\right) = M\left(\frac{a}{a}, \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{a}M(a, b)
\end{aligned}$$

Și atunci, folosind teorema 2.2.4, avem:

$$M(a, b) = a \cdot M(1+x, 1-x) = \frac{\pi}{2 \cdot K(x)} = \frac{\pi}{2 \cdot I(a, b)}.$$

2.3 Integrale eliptice; formula lui Legendre

În acest paragraf vom introduce și integralele eliptice de specia a doua și vom demonstra formula lui Legendre care leagă cele două tipuri de integrale. Rezultatele pe care le stabilim vor fi utilizate în ultimul paragraf pentru obținerea unor formule de calcul al perimetrului lemniscatei lui Bernoulli și al elipsei.

2.3.1 Definiție. Integrala

$$E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 t} \, dt, |x| < 1$$

se numește integrala eliptică completă de specia a doua.

Reamintim că integrala eliptică completă de specia întâi este:

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}}, |x| < 1.$$

În cele ce urmează prezentăm o formulă care leagă cele două tipuri de integrale eliptice, formulă datorată lui Legendre.

2.3.2 Teoremă. Fie $x \in (0, 1)$ și fie $x' = \sqrt{1 - x^2}$; atunci:

$$(L) \quad K(x) E(x') + K(x') E(x) = K(x) K(x') + \frac{\pi}{2}.$$

⊙ **Demonstrație.** Fie $c = x^2$ și $c' = 1 - c$; atunci formula (L) revine la

$$(l) \quad k(c) \cdot e(1 - c) + k(1 - c) \cdot e(c) = k(c) \cdot k(1 - c) + \frac{\pi}{2}, 0 < c < 1,$$

unde $k(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - c \sin^2 t}}$, iar $e(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - c \sin^2 t} dt$. Fie funcția $l : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$l(c) = e(c) \cdot k(1 - c) + e(1 - c) \cdot k(c) - k(c) \cdot k(1 - c).$$

l este funcție derivabilă pe $(0, 1)$; să calculăm derivata sa.

$$e'(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin^2 t}{2\sqrt{1 - c \sin^2 t}} dt = \frac{1}{2c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - c \sin^2 t - 1}{\sqrt{1 - c \sin^2 t}} dt,$$

de unde

$$(1) \quad e'(c) = \frac{1}{2c} [e(c) - k(c)].$$

$$(2) \quad k'(c) = -\frac{1}{2c} k(c) + \frac{1}{2c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1 - c \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pentru evaluarea termenului al doilea din (2) observăm că:

$$(3) \quad \left(\frac{\sin t \cos t}{\sqrt{1 - c \sin^2 t}} \right)' = \frac{c - 1}{c} \cdot \frac{1}{(1 - c \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{c} \cdot \sqrt{1 - c \sin^2 t}.$$

Dacă integrăm relația (3) în raport cu t pe intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$ obținem:

$$0 = \frac{c - 1}{c} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1 - c \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{c} \cdot e(c)$$

și deci, revenind la relația (2):

$$(4) \quad k'(c) = \frac{1}{2cc'} [e(c) - c'k(c)], c' = 1 - c.$$

Evident că $[e(1-c)]' = -e'(1-c)$ și $[k(1-c)]' = -k'(1-c)$; utilizând formulele (1) și (4) obținem, $\forall c \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} l'(c) &= \frac{1}{2c} \cdot e(c) \cdot k(1-c) - \frac{1}{2c} \cdot k(c) \cdot k(1-c) - \frac{1}{2cc'} \cdot e(c) \cdot e(1-c) + \frac{1}{2c'} \cdot e(c) \cdot k(1-c) - \\ &- \frac{1}{2c'} \cdot e(1-c) \cdot k(c) + \frac{1}{2c'} \cdot k(c) \cdot k(1-c) + \frac{1}{2cc'} \cdot e(c) \cdot e(1-c) - \frac{1}{2c} \cdot k(c) \cdot e(1-c) - \\ &- \frac{1}{2cc'} \cdot e(c) \cdot k(1-c) + \frac{1}{2c} \cdot k(c) \cdot k(1-c) + \frac{1}{2cc'} \cdot e(1-c) \cdot k(c) - \frac{1}{2c'} \cdot k(c) \cdot k(1-c) = \\ &= \left(\frac{1}{2c} + \frac{1}{2c'} - \frac{1}{2cc'} \right) \cdot e(c) \cdot k(1-c) + \left(-\frac{1}{2c} - \frac{1}{2c'} + \frac{1}{2cc'} \right) \cdot e(1-c) \cdot k(c) = 0. \end{aligned}$$

Deoarece derivata funcției l este zero pe intervalul $(0, 1)$ funcția este constantă pe acest interval; fie $l_0 \in \mathbb{R}$ așa fel încât:

$$(5) \quad l(c) = l_0, \forall c \in (0, 1).$$

Pe de altă parte,

$$l(c) = \underbrace{(e(c) - k(c)) \cdot k(1-c)}_{l_1(c)} + \underbrace{e(1-c) \cdot k(c)}_{l_2(c)}.$$

$$\begin{aligned} |l_1(c)| &= c \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-c\sin^2 t}} dt \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\cos^2 t + c\sin^2 t}} dt \leq \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{c\cos^2 t + c\sin^2 t}} dt \end{aligned}$$

sau

$$|l_1(c)| \leq \sqrt{c} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-c\sin^2 t}} dt \text{ și deci } \lim_{c \rightarrow 0} l_1(c) = 0.$$

Deoarece

$$\lim_{c \rightarrow 0} l_2(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} dt \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

rezultă că

$$\lim_{c \rightarrow 0} l(c) = \frac{\pi}{2}.$$

Din (5) însă

$$\lim_{c \rightarrow 0} l(c) = l_0$$

și deci $l_0 = \frac{\pi}{2}$. Rezultă atunci că

$$l(c) = \frac{\pi}{2}, \forall c \in (0, 1)$$

ceea ce încheie demonstrația. ■

2.3.3 Observație. Să remarcăm că dacă $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ atunci $x = x'$ și deci formula lui Legendre se scrie sub forma simplificată

$$2K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - K^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Vom utiliza această formă redusă a formulei lui Legendre pentru a demonstra o formulă integrală interesantă.

2.3.4 Corolar.

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx, \quad E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

și astfel relația din observația precedentă devine

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx \cdot \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{\pi}{4}}$$

Demonstrație. În integralele

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2 - \sin^2 t}} \text{ și } E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - \sin^2 t} dt$$

facem schimbarea de variabilă $\cos t = x$ și obținem:

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx \text{ și respectiv } E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

Înlocuim acum aceste valori în forma redusă a formulei lui Legendre (vezi observația 2.3.3) și obținem

$$2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx \cdot \int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx - 2 \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx \right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

de unde rezultă imediat relația de demonstrat. ■

2.3.5 Observații. (i) Formula din corolarul precedent a fost demonstrată pentru prima dată de Euler, în 1782; formulări echivalente au fost stabilite mai devreme de Landen și de Wallis.

(ii) Dacă în integrala $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$ facem schimbarea de variabilă $1-x^4 \mapsto x^2$, obținem:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}} dx$$

și astfel formula de mai sus revine la:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2.4 Perimetrul lemniscatei și al elipsei

Perimetrul lemniscatei

Funcțiile eliptice și integralele corespunzătoare își datorează numele problemei rectificării arcului de elipsă, însă problema cu adevărat fructuoasă a fost rectificarea arcului de lemniscată.

În 1694, Jacob Bernoulli publica în *Acta Eruditorum* un articol despre o curbă “ce are forma cifrei opt”. Bernoulli a numit această curbă lemniscată (lat. *lemniscus* = panglică).

Proprietățile generale ale lemniscatei au fost studiate de Giovanni Fagnano (1715-1797). Fagnano arată cum se poate dubla arcul de lemniscată cu rigla și compasul. Euler se ocupă și el de această problemă stabilind un rezultat general de adunare a arcelor de lemniscată.

După aproape o jumătate de secol de la descoperirea lui Euler a teoremei de adunare a arcelor de lemniscată, Gauss inversează problema, privind coordonata radială r ca funcție de lungimea arcului. Dacă se presupune că r își schimbă semnul când trece prin zero, funcția ce se obține este calitativ similară cu funcția sinus și se numește sinusul lemniscatic. Este periodică cu o perioadă egală cu perimetrul lemniscatei. Gauss extinde această funcție în planul complex obținând astfel prima funcție eliptică (dublu periodică și meromorfă); perioada reală a acestei funcții se exprimă cu ajutorul integralelor eliptice de prima specie și astfel poate fi aproximată cu ajutorul algoritmului mediilor aritmetico – geometrice ale lui 1 și $\sqrt{2}$; ulterior, Gauss arată că media aritmetico - geometrică este, în general, strâns legată de perioadele funcțiilor eliptice.

Lemniscata se poate defini ca locul geometric al punctelor din plan pentru care produsul distanțelor la două puncte fixe este constant. Bernoulli consideră punctele fixe din plan $F_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ și $F_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ iar constanta produs $\frac{1}{2}$. Este ușor atunci să obținem ecuația pe care trebuie să o satisfacă coordonatele (x, y) ale unui punct generic de pe lemniscată

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

Dacă trecem la coordonate polare:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, r \geq 0, t \in [0, 2\pi),$$

obținem ecuația în coordonate polare

$$r^2 = \cos 2t.$$

Această curbă este simetrică față de cele două axe de coordonate și atunci vom studia doar comportarea ei în primul cadran, restrângând domeniul de variație a argumentului t la intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$. Obținem atunci din ecuația în coordonate polare a lemniscatei

$$\begin{cases} \cos t = \sqrt{\frac{1+r^2}{2}} \\ \sin t = \sqrt{\frac{1-r^2}{2}} \end{cases}, r \in [0, 1].$$

Întorcându-ne la ecuațiile în coordonate polare obținem ecuațiile parametrice ale lemniscatei:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r^2 + r^4} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r^2 - r^4} \end{cases}, r \in [0, 1].$$

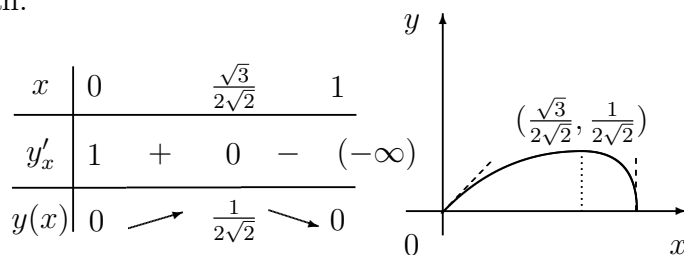
Funcțiile x și y sunt derivabile și

$$\begin{cases} x'_r = \frac{1+2r^2}{\sqrt{2}\sqrt{1+r^2}} \\ y'_r = \frac{1-2r^2}{\sqrt{2}\sqrt{1-r^2}} \end{cases}.$$

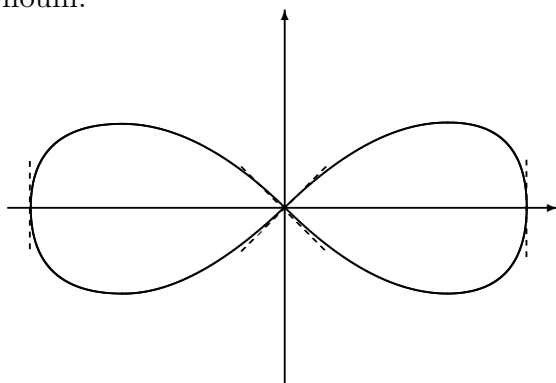
Atunci

$$y'_x = \frac{y'_r}{x'_r} = \frac{(1-2r^2)\sqrt{1+r^2}}{(1+2r^2)\sqrt{1-r^2}}, r \in [0, 1).$$

Prezentăm mai jos un tabel de variație și un grafic al lemniscatei în primul cadran.



Folosind simetria curbei față de axe obținem graficul complet al lemniscatei lui Bernoulli.



Lungimea acestei curbe este:

$$L = 4 \cdot \int_0^1 \sqrt{(x'_r)^2 + (y'_r)^2} dr = 4 \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^4}} dr.$$

Am remarcat în corolarul 2.3.4 că

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^4}} dr = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

și deci

$$L = 2\sqrt{2} \cdot K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Din teorema lui Gauss (teorema 2.2.4) și din observațiile 2.2.2 obținem:

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2 \cdot M\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\pi}{2 \cdot M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\pi}{\sqrt{2} \cdot M(\sqrt{2}, 1)}$$

și deci lungimea lemniscatei va fi:

$$L = \frac{2\pi}{M(\sqrt{2}, 1)}.$$

Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șirurile algoritmului mediilor aritmetico-geometrice pentru care $a_0 = \sqrt{2}$ și $b_0 = 1$. Atunci $b_n \uparrow M(\sqrt{2}, 1)$ și $a_n \downarrow M(\sqrt{2}, 1)$ și deci

$$\frac{2\pi}{a_n} \uparrow L \downarrow \frac{2\pi}{b_n}.$$

Putem folosi algoritmul $(A - G)$ pentru calculul aproximativ al lungimii lemniscatei. Vom da o formulă pentru evaluarea erorii în acest calcul:

$$L - \frac{2\pi}{a_n} < \frac{2\pi}{b_n} - \frac{2\pi}{a_n} < 2\pi(a_n - b_n)$$

și conform relației $(*)$ din propoziția 2.2.1,

$$L - \frac{2\pi}{a_n} < 16\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}-1}{8}\right)^{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dacă, de exemplu, vrem să calculăm lungimea lemniscatei cu trei zecimale exacte rezolvăm inegalitatea

$$16\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}-1}{8}\right)^{2^n} < 10^{-3}.$$

Pentru $n = 2$ obținem $16\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}-1}{8}\right)^{2^2} = 0.000361... < 10^{-3}$. Rezultă că $\frac{2\pi}{a_2}$ va da primele trei zecimale exacte ale lungimii lemniscatei lui Bernoulli. Obținem:

$$\begin{array}{ll}
a_1 = 1.207106781186547... & \frac{2\pi}{a_0} = 4.442882938158366... \\
b_1 = 1.189207115002721... & \frac{a_0}{2\pi} = 6.283185307179586... \\
a_2 = 1.198156948094634... & \frac{b_0}{2\pi} = 5.205161138274292... \\
b_2 = 1.198123521493120... & \frac{a_1}{2\pi} = 5.283508001182123... \\
a_3 = 1.198140234793877... & \frac{b_1}{2\pi} = \underline{5.244041957250595...} \\
b_3 = 1.198140234677307... & \frac{a_2}{2\pi} = \underline{5.244188261448521...} \\
& \frac{b_2}{2\pi} = \underline{5.244115108329133...} \\
& \frac{a_3}{2\pi} = \underline{5.244115108839346...} \\
& \frac{b_3}{2\pi} = \underline{5.244115108839346...}
\end{array}$$

Observăm că 5.244 este o aproximare cu trei zecimale exacte a lungimii lemniscatei; în plus rezultă că pentru $n = 3$ se obține o aproximare a lungimii lemniscatei cu 9 zecimale exacte. Această creștere rapidă a exactității se datorează vitezei de convergență a lgoritmului mediilor aritmetico-geometrice.

Perimetrul elipsei

Încă de pe vremea lui Kepler și Euler s-a încercat găsirea unei formule pentru calculul lungimii elipsei. În 1602, Kepler afirma că orbita lui Marte este un oval. Mai târziu a descoperit că, de fapt, era o elipsă cu Soarele într-unul din focare (Kepler a fost cel care a introdus cuvântul “focar” în 1609). Deci, motivul inițial pentru găsirea unei aproximări pentru perimetrul elipsei a fost dorința de a calcula cu acuratețe orbitele eliptice ale planetelor.

Nu există o formulă pentru lungimea elipsei care să utilizeze funcțiile elementare; dacă în cazul lemniscatei, lungimea se exprima cu o integrală eliptică de prima specie, lungimea elipsei se exprimă cu o integrală eliptică de specia a doua.

Elipsa poate fi caracterizată ca fiind locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanțelor la două puncte fixe este constantă.

Ecuția implicită a elipsei este:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Elipsa poate fi dată și prin ecuații parametrice:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

și atunci, printr-un calcul elementar, obținem că perimetrul elipsei, L , este:

$$\begin{aligned} L = L(a, b) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\ &= 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \\ &= 4a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t} dt = 4a \cdot E(x), \text{ unde } x^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \end{aligned}$$

În relația de mai sus am presupus că $a \geq b > 0$ iar $E(x)$ este integrala eliptică completă de specia a doua (vezi definiția 2.3.1).

După cum ne-am fi așteptat, primul impuls în ceea ce privește găsirea unor metode pentru calculul perimetrului elipsei provine din astronomie. În 1609, Kepler a oferit o primă aproximare : $L \approx \pi(a + b)$ și $L \approx 2\pi\sqrt{ab}$ deși argumentele sale nu erau foarte riguroase, iar $2\pi\sqrt{ab}$ era doar o limită inferioară a lui L . Kepler a observat că elipsa cu semiaxele a și b și cercul de rază $\sqrt{ab}$ au aceeași arie. Cum cercul are o circumferință mai mică, rezultă că $L \geq 2\pi\sqrt{ab}$. În plus, Kepler remarcă faptul că $(a + b) \geq 2\sqrt{ab}$ și atunci afirmă că:

$$L = \pi(a + b)$$

Kepler pare să folosească curiosul principiu potrivit căruia două cantități mai mari decât un același număr sunt aproape egale.

Aproximări ale lui L sunt numeroase în literatura matematică, ele depinzând de valorile lui a și b și fiind cu atât mai precise cu cât excentricitatea elipsei, $x = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, este mai mică.

În cele ce urmează vom prezenta o metodă de aproximare a perimetrului elipselor pentru care semiaxele sunt legate de relația: $a = \sqrt{2} \cdot b$. În această situație $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ iar perimetrul este:

$$L = 4a \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Folosind forma redusă a formulei lui Legendre (vezi observația 2.3.3), obținem:

$$L = 2a \cdot K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi a}{K(\frac{1}{\sqrt{2}})}.$$

Deoarece

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2} \cdot M(\sqrt{2}, 1)},$$

$$L = \sqrt{2}a \cdot \left[\frac{\pi}{M(\sqrt{2}, 1)} + M(\sqrt{2}, 1) \right].$$

Să presupunem, pentru simplificare, că $a = \sqrt{2}$; utilizând iarăși șirurile algoritmului mediilor aritmetico-geometrice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pentru care $a_0 = \sqrt{2}$ și $b_0 = 1$. Atunci

$$2\left(b_n + \frac{\pi}{a_n}\right) \uparrow L \downarrow 2\left(a_n + \frac{\pi}{b_n}\right)$$

și deci obținem

$$L - 2\left(b_n + \frac{\pi}{a_n}\right) < 16(1 + \pi) \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{8}\right)^{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pentru $n = 2$ vom obține perimetrul elipsei cu trei zecimale exacte:

$L = 7.640\dots$ Pentru $n = 3$ se determină primele 8 zecimale exacte:

$L = 7.64039557\dots$

Bibliografie

- [AB] Almkvist, G., Berndt, B. - *Gauss, Landen, Ramanujan, the Arithmetic-Geometric Mean, Ellipses and the Ladies Diary*, Amer. Math. Monthly, 95(1988), pag. 585-608.
- [BB] Borwein, J.M., Borwein, P.B. - *The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions*, SIAM Review, 26(1984), pag 351-366.
- [Ca] Carlson, B.C. - *Algorithms involving arithmetic and geometric means*, Amer. Math. Monthly, 78(1971), pag 496-505.
- [Gh] Ghelfond, A.O. - *Calculul cu diferențe finite*, Ed. Tehnică, București, 1956.
- [Sc] Schonberg, I. - *Privelști matematice*, Ed. Tehnică, București, 1989, pag. 116-128.

Capitolul 3

Elemente de analiză asimptotică

Analiza asimptotică este o ramură importantă a analizei matematice. Studiul comportării la limită a unor obiecte matematice complicate (funcții definite prin integrale cu parametri, soluții ale unor ecuații diferențiale etc) necesită unele metode și tehnici speciale. Una dintre aceste metode, inițiată de Laplace, utilizează faptul că studiul comportării la infinit al unei funcții de tipul

$$f(t) = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(t, x) dx$$

se poate face studiind maximum $\max_x \Phi(t, x)$ și apoi integrând funcția Φ numai pe o vecinătate a punctului unde maximumul este atins. Această integrare se poate face aproximând funcția Φ prin funcții mai simple. Rezultatul este de obicei o dezvoltare asimptotică a funcției f . Deși metoda utilizează această tehnică generală, aplicarea ei practică se face în mod diferit de la caz la caz.

În primul paragraf se amintesc definițiile simbolurilor O și o ale lui Landau și se dau mai multe exemple care să faciliteze înțelegerea corectă a lucrului cu acestea.

Se definesc șirurile asimptotice și apoi se definește, după Poincaré, dezvoltarea asimptotică a unei funcții. Se dau mai multe exemple de serii asimptotice care nu converg la funcția din a cărei dezvoltare provin sau care reprezintă dezvoltări ale unor funcții diferite. În finalul paragrafului se studiază operații cu dezvoltări asimptotice.

Al doilea paragraf este dedicat studiului aproximărilor asimptotice ale diverselor integrale cu parametru.

Se prezintă metoda lui Laplace de dezvoltare, insistându-se asupra importanței găsirii unor dezvoltări asimptotice divergente. Se evaluează integralele de tipul $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} x^k dx$, integrale utile în dezvoltările asimptotice ulterioare. Se prezintă lema lui Watson și se dau exemple de comportări asimptotice. Unul dintre exemplele reluate în diverse moduri și cazuri particulare vizează obținerea de condiții pentru dezvoltarea asimptotică a integralelor de tipul

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x) e^{t \cdot h(x)} dx.$$

O importanță aparte o are prezentarea comportării asimptotice la infinit a funcției Γ (formula lui Stirling) comportare studiată în ultimul paragraf al capitolului.

3.1 Șiruri și serii asimptotice

Simbolul O

3.1.1 Definiție. Fie f și φ două funcții definite pe o mulțime oarecare $A \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că $f = O(\varphi)$ ($x \in A$) dacă $\exists M > 0$ astfel încât $|f(x)| < M \cdot |\varphi(x)|$, pentru $\forall x \in A$. Relația se citește: “ f este de ordinul o mare a lui φ pe mulțimea A ”.

Dacă $\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in A$, atunci condiția de mai sus este echivalentă cu mărginirea funcției $\frac{f}{\varphi}$ pe mulțimea A .

3.1.2 Exemple.

1. $x^2 = O(x)$ ($|x| < 2$)
2. $\sin x = O(1)$ ($x \in \mathbb{R}$)
3. $\sin x = O(x)$ ($x \in \mathbb{R}$)

De multe ori ne interesează să comparăm f cu φ doar într-o porțiune a mulțimii A , în special unde informația nu este trivială. De exemplu formula $\sin x = O(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) ne interesează doar pentru valori mici ale lui $|x|$.

3.1.3 Definiție. Fie f și φ două funcții definite pe mulțimea A și fie x_0 un punct de acumulare pentru A . Spunem că $f = O(\varphi)$ ($x \rightarrow x_0$), dacă există o constantă pozitivă M și o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât

$|f(x)| \leq M \cdot |\varphi(x)|$ pentru $x \in V \cap A \setminus \{x_0\}$. Relația se citește: “ f este de ordinul o mare a lui φ când $x \rightarrow x_0$ ”.

Altfel spus $f = O(\varphi)$ ($x \rightarrow x_0$) dacă există o vecinătate V a punctului x_0 așa fel încât $f = O(\varphi)(x \in V \cap A \setminus \{x_0\})$.

În continuare vom considera de multe ori pe $x_0 = 0$ sau ∞ , deoarece aceste cazuri apar de cele mai multe ori în aplicații; orice x_0 poate fi transformat în 0 sau ∞ , prin schimbarea de variabilă $\xi = x - x_0$ sau $\xi = \frac{1}{x - x_0}$. Astfel, aplicând definiția de mai sus pentru $x_0 = +\infty$ obținem: $f = O(\varphi)$ ($x \rightarrow \infty$) dacă există numerele reale M și a astfel încât $|f(x)| \leq M \cdot |\varphi(x)|$ pentru $x \in A, a < x$.

3.1.4 Exemple.

1. $x^2 = O(x)$ ($x \rightarrow 0$)
2. $e^{-x} = O(1)$ ($x \rightarrow \infty$)
3. $(\ln x)^{-x} = O(1)$ ($x \rightarrow \infty$)
4. $x = O(x^2)$ ($x \rightarrow \infty$).

Să studiem câteva formule ce implică simbolul O .

Formula $O(x) + O(x^2) = O(x)$ ($x \rightarrow 0$) se interpretează astfel: $\forall f$ și g două funcții astfel încât $f(x) = O(x)$ ($x \rightarrow 0$) și $g(x) = O(x^2)$ ($x \rightarrow 0$) are loc $f(x) + g(x) = O(x)$ ($x \rightarrow 0$).

În mod analog se interpretează formulele: $O(x) + O(x^2) = O(x^2)$ ($x \rightarrow \infty$), $e^{O(1)} = O(1)$ ($-\infty < x < \infty$)

Formula $e^{-x} = 1 + x + O(x^2)$ ($x \rightarrow 0$) implică existența unei funcții f astfel încât $f(x) = O(x^2)$ ($x \rightarrow 0$) și $e^{-x} = 1 + x + f(x)$.

Formula $x^{-1}O(1) = O(1) + O(x^{-2})$ ($x > 0$) se interpretează astfel: pentru orice funcție f cu $f(x) = O(1)$ ($x > 0$) există două funcții g și h , $g(x) = O(1)$ și $h(x) = O(x^{-2})$ ($0 < x < \infty$) astfel încât $x^{-1}f(x) = g(x) + h(x)$.

Justificarea este simplă:

Considerăm $g(x) = 0$ și $h(x) = x^{-1}f(x)$ dacă $0 < x \leq 1$ și $g(x) = x^{-1}f(x)$ și $h(x) = 0$ dacă $x > 1$.

Este evident că semnul “=” este nepotrivit pentru astfel de relații deoarece sugerează simetrie și aici formulele nu sunt simetrice.

De exemplu, formula $O(x) = O(x^2)$ ($x \rightarrow \infty$) este corectă, dar $O(x^2) = O(x)$ ($x \rightarrow \infty$) este falsă.

Fie φ și ψ două funcții astfel încât $\varphi = O(\psi)$ ($x \rightarrow \infty$) este adevărată și $\psi = O(\varphi)$ ($x \rightarrow \infty$) este falsă. Dacă o a treia funcție f satisface

$$(1) f = O(\varphi) \ (x \rightarrow \infty)$$

atunci evident satisface

$$(2) f = O(\psi) \ (x \rightarrow \infty).$$

Formula (1) este o rafinare a formulei (2). Spunem că o formulă este **cea mai bună posibil** dacă nu mai poate fi rafinată, adică dacă există două constante pozitive M și m astfel încât $m|\varphi(x)| \leq |f(x)| \leq M|\varphi(x)|$ pentru un x suficient de mare. Acest fapt este echivalent cu a spune că $f = O(\varphi)$ ($x \rightarrow \infty$) și că $\varphi = O(f)$ ($x \rightarrow \infty$).

De exemplu, formula $2x + x \cdot \sin x = O(x)$ ($x \rightarrow \infty$) este cea mai bună posibil, deoarece $x < 2 \cdot x + x \cdot \sin x < 3 \cdot x$.

Dacă m este un întreg pozitiv, atunci estimarea

(3) $e^{-x} = O(x^{-m})$ ($x \rightarrow \infty$) este adevărată. Dar (3) nu este cea mai bună posibil pentru nici o valoare a lui m , deoarece $e^{-x} = O(x^{-(m+1)})$ ($x \rightarrow \infty$) este întotdeauna o rafinare.

Vom discuta acum problema uniformității. Începem cu un exemplu.

Fie f și g două funcții definite pe o mulțime A și m un număr pozitiv.

Atunci este adevărată formula:

$$(4) (f + g)^m = O(f^m) + O(g^m) \ (x \in A)$$

Justificarea este simplă.

$$|(f(x) + g(x))^m| \leq (|f(x)| + |g(x)|)^m \leq \{2 \cdot \max(|f(x)|, |g(x)|)\}^m \leq 2^m \cdot \max(|f(x)|^m, |g(x)|^m) \leq 2^m \cdot (|f(x)|^m + |g(x)|^m).$$

Din formula (4) rezultă că există două constante M și N astfel încât

$$|(f(x) + g(x))^m| \leq M \cdot |f(x)|^m + N \cdot |g(x)|^m \ (x \in A).$$

Observăm că M și N depind de m .

Pe de altă parte, în formula

$$(5) \left(\frac{m}{x^2 + m^2} \right)^m = O\left(\frac{1}{x^m} \right) \ (1 < x < \infty)$$

putem găsi o constantă independentă de m ($0 < m < \infty$): $x^2 + m^2 \geq 2 \cdot m \cdot x$,

$$\text{deci } \left(\frac{m}{x^2 + m^2} \right)^m \leq \frac{1}{(2 \cdot x)^m}.$$

Deoarece $2^{-m} < 1$ pentru orice $m > 0$, rezultă că există un număr pozitiv M , independent de m (de exemplu $M=1$) astfel încât

$$\left(\frac{m}{x^2 + m^2} \right)^m \leq \frac{M}{x^m} \ (1 < x < \infty, m > 0).$$

Putem exprima acest rezultat spunând că (5) este verificată uniform relativ la m . Putem să analizăm formula (5) dintr-un alt punct de vedere. Funcția $m^m(x^2 + m^2)^{-m}$ este o funcție de două variabile x și m și de aceea poate fi considerată ca o funcție de un punct variabil în planul (x, m) . Uniformitatea

formulei (5) se poate exprima și astfel

$$\left(\frac{m}{x^2 + m^2}\right)^m = O\left(\frac{1}{x^m}\right) \quad (1 < x < \infty, 0 < m < \infty).$$

Pentru această formulă, mulțimea A specificată în definiția 3.1.1 este porțiunea planului descrisă de $1 < x < \infty$, $0 < m < \infty$.

În formulele ce implică simbolul O pentru ($x \rightarrow \infty$), există două constante implicate (M și a în definiția 3.1.3). Vom vorbi de uniformitate în raport cu un parametru m doar dacă ambele constante M și a pot fi alese independent de m .

Să studiem următorul exemplu:

Pentru fiecare m , $m > 0$ este adevărată formula

$$m^2(1 + m \cdot x^2)^{-1} = O(x^{-1}) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Dar aceasta formulă nu este adevărată uniform. Dacă ar fi așa atunci ar exista două numere pozitive M și a , ambele independente de m , astfel încât

$$m^2(1 + m \cdot x^2)^{-1} < M \cdot x^{-1} \quad (x > a, m > 0).$$

Dacă considerăm $m = x^2$, obținem $M \cdot (1 + x^4) > x^5$ pentru $x > a$, ceea ce este imposibil.

Pe de altă parte, una din cele două constante poate fi aleasă independent de m . Putem considera $a=m$ și $M=1$ deoarece

$$m^2(1 + m \cdot x^2)^{-1} < m \cdot x^{-2} < 1 \cdot x^{-1} \quad (x > m, m > 0).$$

Putem considera de asemenea $a = 1$ și $M=m$ deoarece $m^2(1 + m \cdot x^2)^{-1} < m \cdot x^{-2} < m \cdot x^{-1} \quad (x > 1, m > 0)$.

Simbolul o

3.1.5 Definiție. Fie f și φ două funcții definite pe o mulțime oarecare A . Spunem că $f = o(\varphi)$ ($x \rightarrow x_0$) (se citește: " f este de ordinul o mic a lui φ când $x \rightarrow x_0$ "), dacă $\forall \epsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq \epsilon \cdot |\varphi(x)|$ pentru $0 < |x - x_0| < \delta, x \in A$.

Dacă $\varphi(x) \neq 0$ într-o vecinătate a lui x_0 (exceptând x_0), $f = o(\varphi)(x \rightarrow x_0)$

este echivalentă cu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \rightarrow 0$.

Dacă $f = o(\varphi)$ ($x \rightarrow x_0$) atunci $f = O(\varphi)(x \rightarrow x_0)$ deoarece convergența implică mărginirea.

3.1.6 Exemple.

1. $\cos x = 1 + o(x)$ ($x \rightarrow 0$)
2. $e^{o(x)} = 1 + o(x)$ ($x \rightarrow 0$)

3. $o(f(x) \cdot g(x)) = o(f(x)) \cdot O(g(x)) \quad (x \rightarrow 0)$
4. $o(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot o(g(x)) \quad (x \rightarrow 0)$.

Se pot face numeroase operații cu formule ce implică simbolurile O și o .

Ca un exemplu să presupunem $f_n = O(g_n)$ pentru $n=1,2,3,\dots, N$.

Atunci

$$\sum_{n=1}^N a_n \cdot f_n(x) = O\left(\sum_{n=1}^N |a_n| \cdot |g_n(x)|\right), \text{ unde } a_n \text{ sunt constante reale.}$$

Justificarea este următoarea:

Deoarece $f_n = O(g_n)$, există prin definiție o constantă reală pozitivă A_n astfel încât $|f_n(x)| \leq A_n \cdot |g_n(x)|$. Fie $A = \max A_n$, $n=1,2,3,\dots, N$. Atunci

$$\left|\sum_{n=1}^N a_n \cdot f_n(x)\right| \leq \sum_{n=1}^N |a_n \cdot f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^N |a_n| \cdot |f_n(x)| \leq A \cdot \sum_{n=1}^N |a_n| \cdot |g_n(x)|$$

care implică relația de mai sus.

Alte rezultate a căror justificare o propunem:

1. Dacă $f = O(g)$ atunci $|f(x)|^\alpha = O(|g(x)|^\alpha)$ pentru $\alpha > 0$.
2. Dacă $f_i = O(g_i)$, $i=1,2,3,\dots, n$ și $|g_i(x)| \leq |g(x)|$, atunci $\sum_{i=1}^n a_i \cdot f_i(x) =$

$O(g(x))$ unde a_i , $i=1,2,\dots, n$ sunt constante.

3. $f_i = O(g_i)$, $i=1,2,3,\dots, n$ atunci $\prod_{i=1}^n f_i(x) = O(\prod_{i=1}^n g_i(x))$.

Dacă în formulele de mai sus simbolul O este înlocuit de simbolul o , formulele rămân adevărate.

Relațiile cu ordine pot fi integrate dar nu pot fi în general derivate. Dacă o funcție f este o funcție de două variabile x și y și $f = O(g)$ ($x \rightarrow x_0$) atunci de obicei (dar nu întotdeauna)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = O\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right) \quad (x \rightarrow x_0).$$

Cu toate că anumite rezultate sigure pot fi date pentru diferențiere, în practică fiecare caz este mai bine să fie considerat separat.

3.1.7 Definiție. Spunem că o funcție f este **asimptotic echivalentă sau asimptotic egală** cu o funcție g și scriem $f(x) \sim g(x)$ ($x \rightarrow x_0$) dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Relația $f(x) \sim g(x)$ poate fi scrisă în mod echivalent $f(x) = g(x)(1 + o(1))$ ($x \rightarrow x_0$), $f = g + o(g)$ ($x \rightarrow x_0$) sau $f(x) = e^{o(1)}g(x)$.

Exemple:

1. $x + 1 \sim x$ ($x \rightarrow \infty$).
2. $x^2 + x \ln x \sim x^2$ ($x \rightarrow \infty$).

$$3. x^2 + x \ln x \sim x \ln x \quad (x \rightarrow 0).$$

$$4. \operatorname{ch} x \sim 1 \quad (x \rightarrow 0).$$

$$5. \operatorname{ch} x \sim \frac{1}{2}e^x \quad (x \rightarrow \infty).$$

$$6. n! \sim e^{-n} n^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

A determina “comportarea asimptotică” a unei funcții date f când $x \rightarrow x_0$ înseamnă a determina o funcție simplă g care este asimptotic echivalentă cu f . Aici simplă înseamnă că evaluarea sa explicită nu este dificilă dacă x este foarte mare.

Serii asimptotice

3.1.8 Definiție. O funcție f este dezvoltabilă în serie de puteri în jurul punctului x_0 dacă există $r > 0$ așa fel încât $f(x) = \sum_0^\infty a_n(x - x_0)^n$, oricare ar fi x cu $|x - x_0| < r$.

f este dezvoltabilă la infinit dacă există $R > 0$ așa fel încât $f(x) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{x^n}$, oricare ar fi x cu $|x| > R$.

Fie $(S_n(x))$ șirul sumelor parțiale a uneia dintre seriile de mai sus. Deci $S_n(x) = \sum_{m=0}^n a_m(x - x_0)^m$ sau $S_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{a_m}{x^m}$; atunci $|f(x) - S_n(x)| \rightarrow 0$ pentru $(n \rightarrow \infty)$. Astfel când n crește, $S_n(x)$ reprezintă o aproximare cu un grad din ce în ce mai mare de acuratețe a lui f .

Dacă f nu este dezvoltabilă în serie de puteri în jurul punctului în discuție, putem descrie totuși comportarea sa prin sumele parțiale $S_n(x)$ ale unei serii aproximative diferite numită dezvoltare asimptotică. Astfel de serii nu sunt de obicei convergente dar cu toate acestea $|f(x) - s_n(x)| \rightarrow 0$ pentru un n fixat și pentru x tinzând la x_0 sau la ∞ .

3.1.9 Definiție. Un șir de funcții reale, definite pe o mulțime A , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, este un **șir asimptotic** pentru $x \rightarrow x_0$ (x_0 punct de acumulare pentru A), dacă:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists V$ -vecinătate pentru x_0 a.î. $f_n(x) \neq 0, \forall x \in V \cap A \setminus \{x_0\}$,
3. $f_{n+1} = o(f_n)(x \rightarrow x_0), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Deci $(f_n)_n$ este șir asimptotic dacă și numai dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$; aici se subînțelege că $f_n(x)$ nu se anulează într-o vecinătate a lui x_0 (exceptând eventual punctul x_0) și că $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3.1.10 Observație. Dacă șirul (f_n) este un șir asimptotic pentru $x \rightarrow x_0$ atunci, $\forall n \in \mathbb{N}$, $O(f_{n+1}) = o(f_n)(x \rightarrow x_0)$.

Exemple de șiruri asimptotice:

1. $\{(x - x_0)^n\}$ pentru $x \rightarrow x_0$.
2. $\{(\ln x)^{-n}\}$ pentru $x \rightarrow \infty$.
3. $\{e^{-x}x^{-a_n}\}$ pentru $x \rightarrow \infty$, unde (a_n) este un șir de numere reale cu $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

3.1.11 Teoremă. Fie $(f_n)_{n \geq 1}$ un șir asimptotic pentru $x \rightarrow x_0$ și $(a_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ un șir cu primul termen, a_1 , nenul; următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $f(x) = \sum_{n=1}^N a_n f_n(x) + o(f_N(x))(x \rightarrow x_0), \forall N \in \mathbb{N}^*$
 - (ii) $f(x) = \sum_{n=1}^N a_n f_n(x) + O(f_{N+1}(x))(x \rightarrow x_0), \forall N \in \mathbb{N}^*$.
- Oricare dintre aceste condiții echivalente antrenează:
- (iii) $f(x) \sim \sum_{n=1}^N a_n f_n(x)(x \rightarrow x_0), \forall N \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație. (i) $\Rightarrow$ (ii):

Din (i), $f(x) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n f_n(x) + a_N f_N(x) + o(f_N(x))$. Rezultă că există $g(x) = o(f_N(x))$ așa fel încât $f(x) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \cdot f_n(x) + a_N \cdot f_N(x) + g(x)$. Din $g(x) = o(f_N(x))$, există $\delta > 0$ așa fel încât, pentru orice x cu $|x - x_0| < \delta$, $|g(x)| < |f_N(x)|$. Fie atunci $M = |a_N| + 1$; pentru orice x cu $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n f_n(x)| \leq |a_N| \cdot |f_N(x)| + |f_N(x)| = M \cdot |f_N(x)|$. Astfel am demonstrat că $f(x) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n f_n(x) = O(f_N(x))(x \rightarrow x_0), \forall N \geq 2$.

(ii) $\Rightarrow$ (i):

Fie $N \in \mathbb{N}^*$ arbitrar; există $M > 0$ și $\delta_0 > 0$ așa fel încât, pentru orice x cu $|x - x_0| < \delta_0$,

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^N a_n f_n(x) \right| \leq M \cdot |f_{N+1}(x)|.$$

Deoarece $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_{N+1}(x)}{f_N(x)} = 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ a.î. $0 < \delta < \delta_0$ și $\forall x$ cu

$$0 < |x - x_0| < \delta, \left| \frac{f_{N+1}(x)}{f_N(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{M}. \text{ Atunci}$$

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^N a_n f_n(x) \right| \leq M \cdot \left| \frac{f_{N+1}(x)}{f_N(x)} \right| \cdot |f_N(x)| < \varepsilon \cdot |f_N(x)|$$

și deci $f(x) = \sum_{n=1}^N a_n f_n(x) + o(f_N(x))(x \rightarrow x_0), \forall N \in \mathbb{N}^*$.

Să arătăm acum că (ii) $\Rightarrow$ (iii):

Fie $N \in \mathbb{N}^*$ arbitrar; există $M > 0$ și $\delta_0 > 0$ așa fel încât, pentru orice x cu $|x - x_0| < \delta_0$,

$$(1) \quad \left| f(x) - \sum_{n=1}^N a_n f_n(x) \right| \leq M \cdot |f_{N+1}(x)|.$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar așa fel încât $\varepsilon \cdot \sum_{n=2}^N |a_n| < M$ și fie

$$(2) \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon |a_1|}{2M} > 0.$$

Deoarece $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_n(x)}{f_1(x)} = 0, \forall n = 2, \dots, N+1, \exists \delta \in (0, \delta_0)$ așa fel încât, oricare ar fi x cu $|x - x_0| < \delta$,

$$(3) \quad \left| \frac{f_n(x)}{f_1(x)} \right| < \varepsilon_1, \forall n = 2, \dots, N+1.$$

Din (1), (2) și (3) obținem, pentru orice x cu $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)}{\sum_{n=1}^N a_n f_n(x)} - 1 \right| = \frac{|f(x) - \sum_{n=1}^N a_n f_n(x)|}{|f_1(x)| \cdot \left| a_1 + \sum_{n=2}^N a_n \frac{f_n(x)}{f_1(x)} \right|} \leq \\ & \leq \frac{M \cdot |f_{N+1}(x)|}{|f_1(x)| \cdot \left(|a_1| - \left| \sum_{n=2}^N a_n \frac{f_n(x)}{f_1(x)} \right| \right)} \leq M \cdot \frac{\left| \frac{f_{N+1}(x)}{f_1(x)} \right|}{|a_1| - \varepsilon_1 \sum_{n=2}^N |a_n|} < \\ & < M \cdot \frac{\varepsilon_1}{|a_1| - \frac{\varepsilon |a_1|}{2M} \cdot \sum_{n=2}^N |a_n|} < M \cdot \frac{\varepsilon_1}{|a_1| - \frac{|a_1|}{2}} = \frac{2M}{|a_1|} \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon, \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\sum_{n=1}^N a_n f_n(x)} = 1$$

și deci că

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^N a_n f_n(x) (x \rightarrow x_0). \quad \blacksquare$$

3.1.12 Definiție. Fie $(f_n)_n$ un șir asimptotic pentru $x \rightarrow x_0$; spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ este o **dezvoltare asimptotică** sau o **aproximare asimptotică** a lui $f(x)$ când $x \rightarrow x_0$ dacă este verificată una dintre condițiile echivalente (i) sau (ii) din teorema precedentă.

Această definiție a fost dată de Poincaré în 1886.

În continuare vom nota cu $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) (x \rightarrow x_0)$ situația în care seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ este dezvoltare asimptotică sau aproximare asimptotică a lui $f(x)$ când $x \rightarrow x_0$.

3.1.13 Observații.

(i) Vom remarca că, dacă $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) (x \rightarrow x_0)$, atunci $f(x) = a_1 f_1(x) + o(f_1(x))$ și de aici rezultă că există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0 \in \mathbb{R}$ și $f(x) - a_0 \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) (x \rightarrow x_0)$ atunci vom conveni să spunem că $f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) (x \rightarrow x_0)$ unde notăm $f_0(x) = 1, \forall x \in A$.

(ii) Dacă pentru funcția f există o dezvoltare asimptotică cu șirul asimptotic dat $(f_n(x))$, atunci ea este unică, a_n fiind unic determinați de relațiile următoare.

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ a_1 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{f_1(x)} \\ a_2 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_1 f_1(x)}{f_2(x)} \\ &\dots\dots\dots \\ a_N &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \frac{f(x) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n f_n(x)}{f_N(x)} \right\} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Într-adevăr, din condiția (i) a teoremei 3.1.11, $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ a.î. $\forall x$ cu $0 < |x - x_0| < \delta$,

$$\left| f(x) - \sum_1^N a_n f_n(x) \right| < \varepsilon \cdot f_N(x) \text{ sau, echivalent,}$$

$$\left| \frac{f(x) - \sum_1^{N-1} a_n f_n(x)}{f_N(x)} - a_N \right| < \varepsilon.$$

Rezultă că o funcție admite o dezvoltare unică în serie asimptotică în raport cu un șir asimptotic dat.

(iii) Primul termen nenul în dezvoltarea asimptotică $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ este numit **termenul dominant** al dezvoltării și dacă, de exemplu $a_1 \neq 0$, scriem $f(x) \sim a_0 + a_1 f_1(x)$ ($x \rightarrow x_0$).

(iv) Relația $f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ ($x \rightarrow x_0$) nu implică faptul că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ este convergentă. O dezvoltare asimptotică poate, desigur, să fie convergentă; dacă e așa, este de obicei mai puțin folositoare decât dacă ar fi divergentă deoarece în cazul unei serii divergente, pentru fiecare x este nevoie doar de câțiva termeni pentru a da o aproximare bună a funcției.

Clasa seriilor de puteri convergente este cea mai simplă clasă de serii asimptotice.

Presupunem că f este suma unei serii de puteri: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ când $|x| \leq p$, p fiind orice număr pozitiv, mai mic decât raza de convergență. Atunci

$$f(x) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots (x \rightarrow 0).$$

Demonstrația este simplă: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq |x|^{n+1} \cdot \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot |x|^{k-n-1}}_{g(x)}.$$

Deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = |a_{n+1}|$, $\exists \delta > 0$ a.î., $\forall x \in (-\delta, \delta)$, $g(x) < |a_{n+1}| + 1 = M$. Atunci

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right| \leq M \cdot |x|^{n+1}$$

și deci $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k + O(x^{n+1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. După punctul (ii) din teorema 3.1.11 aceasta înseamnă că

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (x \rightarrow 0).$$

Dacă o funcție admite dezvoltare Taylor pe o vecinătate a lui x_0 , atunci seria Taylor este o dezvoltare asimptotică convergentă.

Exemplul următor prezintă o dezvoltare asimptotică mai interesantă.

3.1.14 Exemplu.

Fie funcția $E : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$E(t) = \int_t^\infty x^{-1} e^{-x} dx.$$

Să remarcăm că pentru $t = 0$, $E(t) = \Gamma(0) = +\infty$ și că $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$, deci $a_0 = 0$.

Să găsim o dezvoltare asimptotică a lui $E(t)$ pentru $(t \rightarrow \infty)$.

Integrând prin părți obținem:

$E(t) = \left[-\frac{e^{-x}}{x} \right]_t^\infty - \int_t^\infty e^{-x} x^{-2} dx = \frac{e^{-t}}{t} + \left[\frac{e^{-x}}{x^2} \right]_t^\infty + 2 \int_t^\infty e^{-x} x^{-3} dx$ și repetând procedeul rezultă:

$$E(t) = e^{-t} \left\{ \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{2!}{t^3} - \frac{3!}{t^4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{t^n} \right\} +$$

$$+ (-1)^n n! \int_t^\infty e^{-x} x^{-(n+1)} dx = s_n(t) + r_n(t)$$

unde sumele parțiale s_n și restul r_n sunt:

$$s_n(t) = e^{-t} \left\{ \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{2!}{t^3} - \frac{3!}{t^4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{t^n} \right\},$$

$$r_n(t) = (-1)^n n! \int_t^\infty e^{-x} x^{-(n+1)} dx.$$

Seria pentru care s_n este suma parțială este divergentă pentru $\forall t$ (fixat) deoarece termenul general în modul, $\frac{(n-1)!}{t^n}$ tinde la ∞ pentru $n \rightarrow \infty$. Desigur $r_n(t)$ este de asemenea nemărginit pentru $n \rightarrow \infty$ deoarece $s_n(t) + r_n(t)$ trebuie să fie mărginit, $E(t)$ fiind mărginită; acest fapt este de asemenea evident din definiția lui $r_n(t)$. Să considerăm acum pe n fixat și t suficient de mare. Atunci:

$$|r_n(t)| = n! \int_t^\infty e^{-x} x^{-(n+1)} dx < \frac{n!}{t^{n+1}} \int_t^\infty e^{-x} dx = \frac{n!}{t^{n+1}} e^{-t} \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty).$$

Mai mult, pentru n fixat raportul dintre $r_n(t)$ și ultimul termen în $s_n(t)$ este:

$$\left| \frac{r_n(t)}{(n-1)! t^{-n} e^{-t}} \right| < \frac{n}{t} \rightarrow 0 \text{ când } t \rightarrow \infty$$

deci, dacă notăm cu $f_n(t) = \frac{(-1)^n(n-1)!}{t^n}$,

$$\frac{E(t) - s_n(t)}{f_n(t)} \rightarrow 0$$

ceea ce este echivalent cu $E(t) - s_n(t) = o(f_n(t))(t \rightarrow \infty)$ și deci cu

$$E(t) = s_n(t) + o(f_n(t))(t \rightarrow \infty), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ultima relație arată că

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{t^n} \cdot e^{-t} (t \rightarrow \infty).$$

Folosind relația (iii) din teorema 3.1.11 obținem

$$E(t) \sim e^{-t} \left\{ \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{2!}{t^3} - \frac{3!}{t^4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{t^n} \right\} (t \rightarrow \infty), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Partea din dreapta este dezvoltarea asimptotică a lui $E(t)$ pentru $t \rightarrow \infty$.

Problema care apare acum este cum să alegem n -ul optim astfel încât $s_n(t)$ să dea cea mai bună aproximare pentru $E(t)$ pentru un t dat. Evident pentru t suficient de mare primii termeni din s_n vor descrește; de exemplu $2!t^{-3} < t^{-2}$. Totuși, la o anumită valoare a lui n , să spunem N , termenii cu $n > N$ vor începe să crească succesiv pentru un t dat deoarece al n -lea termen $(-1)^n(n-1)!e^{-t}t^{-n}$ este nemărginit pentru $n \rightarrow \infty$. În clasa problemelor pentru care acesta este un exemplu, eroarea cu care se determină s_n este de ordinul primului termen neglijat, și deci locul optim este pentru $n = N$ (desigur N depinde de t). Procedura practică pentru a calcula $E(t)$ pentru un t fixat este de a evalua termenii succesivi în $s_n(t)$ și de a ne opri când se obține primul termen mai mare ca precedentul. Astfel vom afla n -ul pentru care modulul raportului dintre al $(n+1)$ -lea termen și al n -lea termen în s_n este cel mai aproape de 1 (dar mai mic decât 1). Raportul este $\frac{n!e^{-t}t^{-(n+1)}}{(n-1)!e^{-t}t^{-n}} = nt^{-1}$ și deci $N = [t]$.

Convergența unei serii nu e necesară din punct de vedere computațional, decât dacă, desigur, converge foarte repede, deoarece convergența depinde de al n -lea termen pentru n nedefinit de mare.

Ceea ce este mai de dorit este o aproximare care cere doar puțini termeni. Aproximările asimptotice care dau serii divergente, ca în exemplul de mai sus, sunt în mod considerabil mai folositoare din punct de vedere practic.

Operații cu serii asimptotice

3.1.15 Propoziție. Fie $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$ și $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ un șir asimptotic pentru $x \rightarrow x_0$; presupunem că:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) (x \rightarrow x_0) \text{ și}$$

$$g(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} b_n f_n(x) (x \rightarrow x_0).$$

Atunci, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) f_n(x) (x \rightarrow x_0).$$

Demonstrație. $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_0^N a_n f_n(x) + O(f_{N+1}(x)) (x \rightarrow x_0),$$

$$g(x) = \sum_0^N b_n f_n(x) + O(f_{N+1}(x)) (x \rightarrow x_0).$$

Atunci

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \sum_0^N (\alpha a_n + \beta b_n) f_n(x) + O(f_{N+1}(x)) (x \rightarrow x_0).$$

■

3.1.16 Observație. Produsul după Cauchy a două serii asimptotice nu este obligatoriu o serie asimptotică. Într-adevăr, prin înmulțirea formală a celor două serii se obțin termeni de forma $a_n b_m f_n(x) f_m(x)$ iar șirul $(f_n f_m)_{n,m}$ nu poate fi aranjat, în caz general, ca un șir asimptotic. În cazul particular al șirurilor asimptotice $(x^n)_{n \geq 1} (x \rightarrow 0)$ sau $\left(\frac{1}{x^n}\right)_{n \geq 1} (x \rightarrow \infty)$ produsele de mai sus se pot aranja ca șiruri asimptotice.

3.1.17 Propoziție. Fie $(a_n)_n, (b_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri arbitrare și fie $(c_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ șirul definit prin $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0, \forall n \in \mathbb{N}$; presupunem că $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$.

1). Dacă $0 \in A'$, $f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (x \rightarrow 0)$ și $g(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n (x \rightarrow 0)$ atunci $f(x) \cdot g(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n (x \rightarrow 0)$.

2). Dacă $+\infty \in A'$, $f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n} (x \rightarrow \infty)$ și $g(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n} (x \rightarrow \infty)$ atunci $f(x) \cdot g(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n} (x \rightarrow \infty)$.

Demonstrație. 1). Din ipoteză, $\forall N \in \mathbb{N}, \exists f_1, g_1 : A \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f_1(x) = O(x^{N+1})(x \rightarrow 0), g_1(x) = O(x^{N+1})(x \rightarrow 0)$ a.î.

$$f(x) = \sum_0^N a_n x^n + f_1(x), g(x) = \sum_0^N b_n x^n + g_1(x).$$

Înmulțind cele două relații de mai sus obținem

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= \left(\sum_0^N a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_0^N b_n x^n \right) + \\ &+ \left(\sum_0^N a_n x^n \right) \cdot g_1(x) + \left(\sum_0^N b_n x^n \right) \cdot f_1(x) + f_1(x) \cdot g_1(x). \end{aligned}$$

Se observă imediat că

$$\left(\sum_0^N a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_0^N b_n x^n \right) = \sum_0^N c_n x^n + O(x^{N+1})(x \rightarrow 0)$$

și cum $\sum_0^N a_n x^n$ și $\sum_0^N b_n x^n$ sunt mărginite pe o vecinătate a lui 0,

$$\begin{aligned} \left(\sum_0^N a_n x^n \right) \cdot g_1(x) &= O(x^{N+1})(x \rightarrow 0), \\ \left(\sum_0^N b_n x^n \right) \cdot f_1(x) &= O(x^{N+1})(x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Este evident că $f_1(x) \cdot g_1(x) = O(x^{N+1})(x \rightarrow 0)$ și deci

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_0^N c_n x^n + O(x^{N+1})(x \rightarrow 0), \forall N \in \mathbb{N}$$

ceea ce, după teorema 3.1.11 spune că

$$f(x) \cdot g(x) \approx \sum_0^\infty c_n x^n (x \rightarrow 0).$$

Demonstrația punctului 2). este asemănătoare. ■

Ne vom ocupa acum de integrarea și derivarea dezvoltărilor asimptotice. Din motive lesne de înțeles vom considera numai cazurile șirurilor asimptotice $(x^n)_{n \in \mathbb{N}^*}(x \rightarrow 0)$ și $(x^{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}(x \rightarrow \infty)$.

3.1.18 Teoremă. Fie A un interval mărginit sau nemărginit și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f \in \mathfrak{R}_{[c,d]}, \forall [c,d] \subseteq A$ (f este integrabilă în sens Riemann pe orice sub-interval al lui A).

1). Dacă $0 \in A'$ și dacă $f(x) \approx \sum_0^\infty a_n x^n (x \rightarrow 0)$ atunci există o vecinătate V a lui 0 a.î. $f \in \mathfrak{R}_{(0,x]}, \forall x \in V \cap A \setminus \{0\}$ și

$$\int_0^x f(t)dt \approx \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} (x \rightarrow 0).$$

2). Dacă $\infty \in A'$ și dacă $f(x) \approx \sum_0^\infty a_n \cdot x^{-n} (x \rightarrow \infty)$ atunci există o vecinătate V a lui $+\infty$ a.î. funcția $g : A \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t}$, este integrabilă pe $[x, +\infty), \forall x \in V \cap A$ și

$$\int_x^\infty \left[f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right] dt \approx \sum_{n=1}^\infty \frac{a_{n+1}}{n} \cdot x^{-n} (x \rightarrow \infty).$$

⊙ Demonstrație. În enunțul de mai sus $\mathfrak{R}_{(0,x]}$ (respectiv $\mathfrak{R}_{[x,\infty)}$) notează clasa funcțiilor integrabile în sens generalizat pe $(0, x]$ (respectiv pe $[x, \infty)$), adică a acelor funcții pentru care există $\lim_{y \downarrow 0} \int_y^x f(t)dt \in \mathbb{R}$ (respectiv există $\lim_{y \uparrow \infty} \int_x^y f(t)dt \in \mathbb{R}$).

1). Deoarece $f(x) \approx \sum_0^\infty a_n \cdot x^n (x \rightarrow 0)$, $f(x) = a_0 + a_1 x + O(x^2) (x \rightarrow 0)$ deci $\exists \delta > 0, \exists M > 0$ a.î. $|f(x) - a_0 - a_1 x| \leq M \cdot x^2, \forall x \in [-\delta, \delta] \cap A \setminus \{0\}$. Deoarece $\int_0^\delta M \cdot x^2 dx$ converge, $f(x) - a_0 - a_1 x \in \mathfrak{R}_{(0,\delta]}$ de unde $f \in \mathfrak{R}_{(0,\delta]}$ și deci $f \in \mathfrak{R}_{(0,x]}, \forall x \in [-\delta, \delta] \cap A$.

Utilizând din nou ipoteza, $\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists g(x) = O(x^{N+1}) (x \rightarrow 0)$ și există o vecinătate V a lui 0 a.î.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N + g(x), \forall x \in V \cap A \setminus \{0\}.$$

De aici rezultă că $g \in \mathfrak{R}_{(0,x]}, \forall x \in V$ și dacă integrăm relația de mai sus

$$\int_0^x f(t)dt = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 \cdots + \frac{a_N}{N+1} x^{N+1} + \int_0^x g(t)dt.$$

Deoarece $|g(x)| \leq M x^{N+1}, \forall x \in V \cap A \setminus \{0\}$,

$$\left| \int_0^x g(t)dt \right| \leq \frac{M}{N+2} x^{N+2}$$

și deci $\int_0^x g(t)dt = O(x^{N+2})(x \rightarrow 0)$. Rezultă că, $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + O(x^{N+2})(x \rightarrow 0)$$

ceea ce arată că

$$\int_0^x f(t)dt \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} (x \rightarrow 0).$$

2). Presupunem acum că $+\infty \in A'$ și $f(x) \approx \sum_0^{\infty} a_n x^{-n} (x \rightarrow \infty)$; atunci $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + O(x^{-2})(x \rightarrow \infty)$ și deci $\exists M > 0, \exists \delta > 0$ a.î.

$$\left| f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} \right| \leq \frac{M}{x^2}, \forall x \in [\delta, +\infty)$$

Deoarece $\int_{\delta}^{\infty} \frac{M}{x^2} dx$ este convergentă rezultă că $f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} \in \mathfrak{R}_{[\delta, +\infty)}$ deci $f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \in \mathfrak{R}_{[x, +\infty)}, \forall x \in [\delta, +\infty)$.

Acum, $\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists g(x) = O(x^{-(N+1)})(x \rightarrow \infty)$ a.î. $f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} = \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_N}{x^N} + g(x)$.

Rezultă că $g \in \mathfrak{R}_{[x, +\infty)}, \forall x \in [\delta, +\infty)$ și dacă integrăm relația de mai sus

$$\int_x^{\infty} \left[f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right] dt = \frac{a_2}{x} + \dots + \frac{a_N}{N-1} \cdot \frac{1}{x^{N-1}} + \int_x^{\infty} g(x) dx.$$

Deoarece $g(x) = O(x^{-N-1})(x \rightarrow \infty)$, $\exists M > 0, \exists \delta_1 > \delta$ a.î.

$$|g(x)| \leq M \cdot x^{-N-1}, \forall x \in [\delta_1, +\infty),$$

de unde

$$\left| \int_x^{\infty} g(t)dt \right| \leq \frac{M}{N} \cdot x^{-N}, \text{ deci}$$

$$\int_x^{\infty} \left[f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right] dt = \sum_{k=2}^N \frac{a_k}{k-1} \cdot x^{-k+1} + O(x^{-N})(x \rightarrow \infty), \forall N \geq 2,$$

ceea ce arată că

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} \left[f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right] dt &\approx \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n-1} \cdot x^{-n+1} (x \rightarrow \infty) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n} \cdot x^{-n} (x \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

■

3.1.19 Teoremă. Fie A un interval mărginit sau nemărginit și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă a.î. $f' \in \mathfrak{R}_{[c,d]}, \forall [c,d] \subseteq A$.

1). Dacă $0 \in A', f'(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n (x \rightarrow 0)$ și dacă există $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a_0 \in \mathbb{R}$ atunci

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n} \cdot x^n (x \rightarrow 0).$$

2). Dacă $\infty \in A', f'(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n} (x \rightarrow \infty)$ și dacă există $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a_0 \in \mathbb{R}$ atunci $b_0 = b_1 = 0$ și

$$f(x) \approx a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{n} \cdot x^{-n} (x \rightarrow \infty).$$

Demonstrație. 1). Funcției f' îi putem aplica punctul 1) al teoremei precedente; rezultă că există V , o vecinătate a lui 0, a.î. $f' \in \mathfrak{R}_{(0,x]}, \forall x \in V \cap A \setminus \{0\}$ și

$$\int_0^x f'(t) dt \approx \sum_0^{\infty} \frac{b_n}{n+1} \cdot x^{n+1} (x \rightarrow 0).$$

Dar $\int_0^x f'(t) dt = f(x) - \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = f(x) - a_0$ și deci

$$f(x) \approx a_0 + \sum_0^{\infty} \frac{b_n}{n+1} \cdot x^{n+1} (x \rightarrow 0).$$

2). Aplicăm lui f' punctul 2) al teoremei precedente și rezultă că există o vecinătate V a lui $+\infty$ a.î. funcția $g : A \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t}$, este integrabilă pe $[x, +\infty), \forall x \in V \cap A$ și

$$\int_x^{\infty} \left[f' - b_0 - \frac{b_1}{t} \right] dt \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{n} \cdot x^{-n} (x \rightarrow \infty).$$

Însă integrala $\int_x^{\infty} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(x) = a_0 - f(x)$ este convergentă și, cum $\int_x^{\infty} g(t) dt$ converge de asemenea, trebuie ca $b_0 = b_1 = 0$. Rezultă că

$$f(x) \approx a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{n} \cdot x^{-n} (x \rightarrow \infty). \quad \blacksquare$$

3.2 Metoda lui Laplace pentru studiul comportării asimptotice a integralelor generalizate

Ne propunem să studiem comportarea asimptotică a unor integrale de tipul

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t, x) dx \quad (t \rightarrow \infty),$$

unde intervalul de integrare (α, β) poate fi mărginit sau nemărginit.

Ideea generală va fi aceea de a restrânge intervalul de integrare (α, β) la un interval mic (ε, η) pe care funcția f are valori maxime și pe care comportarea asimptotică, când $t \rightarrow \infty$, este aceeași ca pe (α, β) . Avantajul restrângerii la un interval mic este că, în asemenea situație, putem aproxima funcția f prin funcții mai simple a căror integrală admite o comportare asimptotică relativ ușor de studiat.

Vom aminti întâi unele proprietăți ale funcției Γ a lui Euler, funcție definită prin următoarea integrală generalizată:

$$\Gamma(a) = \int_{0+0}^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx.$$

Integrala generalizată (sau improprie) mixtă $\int_{0+0}^{\infty}$ este convergentă dacă integralele $\int_{0+0}^1$ și $\int_1^{\infty}$ sunt, amândouă, convergente.

Deoarece $x^{a-1} \cdot e^{-1} \leq x^{a-1} \cdot e^{-x} \leq x^{a-1}$, $\forall x \in (0, 1]$, $\int_{0+0}^1 x^{a-1} \cdot e^{-x} dx$ are aceeași natură cu $\int_{0+0}^1 x^{a-1} dx$. Dar

$$\begin{aligned} \int_{0+0}^1 x^{a-1} dx &= \lim_{u \downarrow 0} \int_u^1 x^{a-1} dx = \begin{cases} \lim_{u \downarrow 0} \left(\frac{1}{a} \cdot x^a \Big|_u^1 \right) & , a \neq 0, \\ \lim_{u \downarrow 0} (\ln x \Big|_u^1) & , a = 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a} & , a > 0, \\ +\infty & , a \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Rezultă că $\int_{0+0}^1 x^{a-1} \cdot e^{-x} dx$ converge dacă și numai dacă $a > 0$.

Pentru a 2-a integrală observăm că $x^{a-1} \cdot e^{-x} = O(e^{-\frac{x}{2}})$ ($x \rightarrow 0$) și, deoarece $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx$ este convergentă, rezultă că $\int_1^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx$ converge, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Rezultă că $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Propoziția următoare amintește câteva dintre proprietățile funcției Γ .

3.2.1 Propoziție.

- 1). $\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a), \quad \forall a > 0.$
- 2). $\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
- 3). $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$
- 4). $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ unde } (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1).$

Demonstrație.

$$1). \Gamma(a+1) = \int_{0+0}^{+\infty} x^a \cdot e^{-x} dx = - \int_{0+0}^{+\infty} x^a \cdot (e^{-x})' dx = -x^a \cdot e^{-x} \Big|_{0+0}^{+\infty} +$$

$$+ a \cdot \int_{0+0}^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx = a \cdot \Gamma(a).$$

$$2). \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 = 0!.$$

În continuare utilizăm relația de la punctul 1):

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2),$$

...

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n).$$

Înmulțind relațiile de mai sus obținem rezultatul de la 2).

$$3). \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{0+0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-x} dx; \text{ facem schimbarea de variabilă } x = y^2 \text{ și}$$

$$\text{obținem } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{0+0}^{+\infty} \frac{1}{y} \cdot e^{-y^2} \cdot 2y dy = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

Ultima egalitate se poate demonstra în diverse moduri; propunem aici o demonstrație bazată pe formula de schimbare de variabilă la integrala dublă.

$$\text{Fie } I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx; \text{ atunci } I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy =$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \text{ În integrala dublă trecem la coordonate polare:}$$

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v \end{cases}, u \geq 0, v \in [0, 2\pi]. \text{ Jacobianul acestei transformări este}$$

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = u$$

și deci

$$I^2 = \iint_{[0, +\infty) \times [0, 2\pi]} e^{-u^2} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)} du dv = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \cdot u du \cdot \int_0^{2\pi} dv =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-u^2} \Big|_0^{+\infty} \right) \cdot 2\pi = \pi,$$

de unde $I = \sqrt{\pi}$.

$$\begin{aligned} 4). \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right) = \\ &= \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{2n-3}{2}\right) = \dots = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{2^n} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proprietățile funcției Γ prezentate în propoziția anterioară permit calcularea valorilor unor integrale ce vor interveni frecvent în cele urmează.

3.2.2 Propoziție.

- 1). $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cdot x^{2n} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot t^{-\frac{2n+1}{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t > 0, \text{ unde } (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \text{ și } (-1)!! = 1.$
- 2). $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cdot x^{2n+1} dx = \frac{n!}{2} \cdot t^{-n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t > 0.$
- 3). $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cdot x^n dx = n! \cdot t^{-n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t > 0.$

Demonstrație. 1). În integrala $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cdot x^{2n} dx$ facem schimbarea de

variabilă $tx^2 = y$ și obținem

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cdot x^{2n} dx &= \int_0^{+\infty} e^{-y} \cdot y^n \cdot t^{-n} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{2n+1}{2}} \cdot \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2). \quad \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cdot x^{2n+1} dx &= \int_0^{+\infty} e^{-y} \cdot y^{\frac{2n+1}{2}} \cdot t^{-\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \\ &= \frac{1}{2} \cdot t^{-n-1} \cdot \Gamma(n+1) = \frac{n!}{2} \cdot t^{-n-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3). \quad \text{Cu schimbarea de variabilă } x = y^2 \text{ obținem } \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cdot x^n dx &= \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-ty^2} \cdot y^{2n+1} dy = n! t^{-n-1}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Vom prezenta un exemplu prin care se va ilustra metoda lui Laplace.

3.2.3 Exemplu. Să se studieze comportarea asimptotică când $t \rightarrow +\infty$ a funcției definite prin integrala:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2} \cdot \ln(1+x+x^2) dx.$$

Să observăm întâi că, $\forall t \in (-1, 1)$,

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n+1} t^n + \dots$$

Dacă integrăm relația precedentă pe $[0, x]$ obținem

$$(1) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots, \forall x \in (-1, 1).$$

Folosim formula (1) pentru dezvoltarea lui $\ln(1+x+x^2)$; pentru a o putea aplica trebuie ca $x+x^2 \in (-1, 1)$, ceea ce este echivalent cu $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Deoarece $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subseteq \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, obținem

$$(2) \quad \ln(1+x+x^2) = (x+x^2) - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x+x^2)^n + \dots$$

sau, grupând termenii asemenea,

$$(3) \quad \begin{aligned} \ln(1+x+x^2) &= x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{6}x^6 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{3n-2}x^{3n-2} + \frac{1}{3n-1}x^{3n-1} - \frac{2}{3n}x^{3n} + \dots, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Vom considera șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin

$$a_{3n-2} = \frac{1}{3n-2}, a_{3n-1} = \frac{1}{3n-1}, a_{3n} = -\frac{2}{3n}, \forall n \geq 1$$

și atunci (3) se rescrie

$$(4) \quad \ln(1+x+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Vom defini acum, pentru orice $N \in \mathbb{N}$, funcția $R_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, prin $R_N(x) = \ln(1+x+x^2) - \sum_{n=1}^{2N-1} a_n x^n, \forall x \in \mathbb{R}$. Aplicăm funcției R_N teorema lui Lagrange pe intervalul $[0, x]$; fie $c \in (0, x)$ a.î. $R_N(x) - R_N(0) = R'_N(c) \cdot x$ sau

$$(5) \quad R_N(x) = R'_N(c) \cdot x.$$

Dar $R'_N(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - 1 - x + 2x^2 - x^3 - x^4 + 2x^5 + \dots - (2N-1)a_{2N-1}x^{2N-2}$. Aducând la același numitor și reducând termenii asemenea obținem:

$$R'_N(x) = -\frac{1}{x^2+x+1} \left[(2N-2)a_{2N-2}x^{2N-1} + (2N-1)a_{2N-1}x^{2N} + (2N-1)a_{2N-1}x^{2N-1} \right].$$

Rezultă că $|R'_N(x)| < 4|x|^{2N-1}$ și atunci, din (5),

$$(6) \quad |R_N(x)| < 4|x|^{2N}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} \ln(1+x+x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{2N-1} a_n x^n + R_N(x) \right] e^{-tx^2} dx = \\ &= \sum_{n=1}^{2N-1} a_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} x^n dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} R_N(x) dx. \end{aligned}$$

Evaluăm ultimul termen din suma de mai sus folosind propoziția 3.2.2:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} R_N(x) dx \right| &\leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} x^{2N} dx = 8 \int_0^{\infty} e^{-tx^2} x^{2N} dx = \\ &= 4\sqrt{\pi} \frac{(2N-1)!!}{2^N} \cdot t^{-\frac{2N+1}{2}} = O\left(t^{-(N+\frac{1}{2})}\right). \end{aligned}$$

Observăm că $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} x^n dx = 0$, pentru orice n impar și astfel, utilizând din nou propoziția 3.2.2,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{N-1} \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n} a_{2n} t^{-(n+\frac{1}{2})} + O\left(t^{-(N+\frac{1}{2})}\right), \forall N \in \mathbb{N}.$$

Punctul (ii) al teoremei 3.1.11 ne arată că

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n} a_{2n} t^{-(n+\frac{1}{2})} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Vom prezenta, în cele ce urmează, comportarea asimptotică a câtorva tipuri de integrale generalizate.

Integrale de tipul $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx$

3.2.4 Teoremă. Fie $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietățile:

- 1). h este continuă pe $\mathbb{R}$,
- 2). $h(x) < h(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- 3). $\exists b, c > 0$ a.î. $h(x) \leq -b, \forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| \geq c$,
- 4). $\exists h''(0) < 0$,
- 5). $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{h(x)} dx$ este convergentă.

Atunci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-th''(0)}} \quad (t \rightarrow \infty).$$

⊖ Demonstrație. Din condiția 2), h admite un maxim absolut în origine. Condiția 4) ne asigură că h este derivabilă pe o vecinătate a originii; atunci, din teorema lui Fermat, $h'(0) = 0$.

Definim funcția $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin $\varphi(x) = h(x) - \frac{1}{2}x^2 \cdot h''(0), \forall x \in \mathbb{R}$.

Se observă că $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ de unde

$$0 = \varphi''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{x}.$$

Fie $\varepsilon > 0$ a.î. $2\varepsilon < -h''(0)$; atunci există $\delta > 0$ a.î. φ să fie derivabilă pe $[-\delta, \delta] \subseteq \mathbb{R}$ și

$$(1) \quad |\varphi'(x)| < \varepsilon \cdot |x|, \forall x \in \mathbb{R} \text{ cu } |x| \leq \delta.$$

Putem alege $\delta < c$ și atunci, cum h este continuă pe compactul $C = [-c, -\delta] \cup [\delta, c]$, există $x_0 \in C$ a.î. $h(x) \leq h(x_0), \forall x \in C$. Din condiția 2), $h(x_0) < 0$ și atunci, dacă notăm cu $M = \min\{b, -h(x_0)\} > 0$, rezultă din 3)

$$(2) \quad h(x) \leq -M, \forall x \in \mathbb{R} \text{ cu } |x| \geq \delta.$$

Fie $x \in [-\delta, \delta]$; aplicăm funcției φ teorema lui Lagrange pe intervalul $[0, x]$. Există deci un punct c între 0 și x a.î. $\varphi(x) - \varphi(0) = \varphi'(c) \cdot x$, de unde, folosind (1),

$$(3) \quad |\varphi(x)| < \varepsilon \cdot x^2, \forall x \in [-\delta, \delta].$$

Din (3) obținem

$$(4) \quad \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot [h''(0) - 2\varepsilon] < h(x) < \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot [h''(0) + 2\varepsilon], \forall x \in [-\delta, \delta].$$

Înmulțim inegalitățile (4) cu $t > 0$, exponențiem, integrăm pe intervalul $[-\delta, \delta]$ și obținem:

$$(5) \quad \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{1}{2}tx^2[h''(0)-2\varepsilon]} dx}_{I_1} < \int_{-\delta}^{\delta} e^{th(x)} dx < \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{1}{2}tx^2[h''(0)+2\varepsilon]} dx}_{I_2}.$$

Folosind propoziția 3.2.2 și inegalitatea $2\varepsilon < -h''(0)$ rezultă:

$$(6) \quad \begin{aligned} I_2 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}tx^2[h''(0)+2\varepsilon]} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}tx^2[-h''(0)-2\varepsilon]} dx = \\ &= \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}t[-h''(0)-2\varepsilon]}} = \sqrt{\frac{2\pi}{-t[h''(0)+2\varepsilon]}}. \end{aligned}$$

Utilizând (2), (5) și (6) obținem

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx &= \int_{(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)} e^{(t-1)h(x)} \cdot e^{h(x)} dx + \int_{-\delta}^{\delta} e^{th(x)} dx < \\ &< e^{-(t-1)M} \cdot \int_{(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)} e^{h(x)} dx + I_2 \leq \\ &\leq e^{-tM} \cdot e^M \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{h(x)} dx + \sqrt{\frac{2\pi}{-t[h''(0)+2\varepsilon]}}. \end{aligned}$$

Deoarece $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{h(x)} dx$ converge, notăm $K = e^M \int_{-\infty}^{+\infty} e^{h(x)} dx \in \mathbb{R}$ și, din relația de mai sus, obținem

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx < K \cdot e^{-tM} + \sqrt{\frac{2\pi}{-t[h''(0)+2\varepsilon]}}, \forall t > 0.$$

Împărțind relația (7) cu $\sqrt{\frac{2\pi}{-th''(0)}}$ și trecând la limită superioară după $t \rightarrow +\infty$ obținem

$$(8) \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx}{\sqrt{\frac{2\pi}{-th''(0)}}} \leq \sqrt{\frac{h''(0)}{h''(0)+\varepsilon}}, \forall \varepsilon \in \left(0, \frac{-h''(0)}{2}\right).$$

Din (8), dacă $\varepsilon \rightarrow 0$, obținem

$$(9) \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx}{\sqrt{\frac{2\pi}{-th''(0)}}} \leq 1.$$

Pe de altă parte, folosind iarăși relațiile (5) și propoziția 3.2.2,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx &\geq \int_{-\delta}^{\delta} e^{th(x)} dx > I_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}tx^2[h''(0)-2\varepsilon]} dx - \int_{(-\infty, -\delta] \cup [\delta, \infty)} e^{\frac{1}{2}tx^2[h''(0)-2\varepsilon]} dx = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{-t[h''(0)-2\varepsilon]}} - \int_{(-\infty, -\delta] \cup [\delta, \infty)} e^{\frac{1}{2}(t-1)x^2[h''(0)-2\varepsilon]} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2[h''(0)-2\varepsilon]} dx. \end{aligned}$$

Observăm că $\frac{1}{2}x^2[h''(0)-2\varepsilon] \leq \frac{\delta^2}{2}[h''(0)-2\varepsilon] \equiv -M(\varepsilon) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| \geq \delta$ și atunci, din inegalitatea precedentă obținem

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx &> \sqrt{\frac{2\pi}{-t[h''(0)-2\varepsilon]}} - e^{-\frac{\delta^2}{2}[2\varepsilon-h''(0)](t-1)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2[2\varepsilon-h''(0)]} dx = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{-t[h''(0)-2\varepsilon]}} - e^{-tM(\varepsilon)} \cdot e^{M(\varepsilon)} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{2\varepsilon-h''(0)}}. \end{aligned}$$

Notăm $K(\varepsilon) = e^{M(\varepsilon)} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{2\varepsilon-h''(0)}} \in \mathbb{R}$ și obținem

$$(10) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx > \sqrt{\frac{2\pi}{-t[h''(0)-2\varepsilon]}} - K(\varepsilon) \cdot e^{-tM(\varepsilon)}.$$

Împărțim relația (10) cu $\sqrt{\frac{2\pi}{-th''(0)}}$ și trecem la limită inferioară după $t \rightarrow +\infty$:

$$(11) \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx}{\sqrt{\frac{2\pi}{-th''(0)}}} \geq \sqrt{\frac{h''(0)}{h''(0)-2\varepsilon}}, \forall \varepsilon \in \left(0, \frac{-h''(0)}{2}\right).$$

În (11) trecem la limită pentru $\varepsilon \rightarrow 0$ și obținem

$$(12) \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx}{\sqrt{\frac{2\pi}{-th''(0)}}} \geq 1.$$

Din (9) și (12) rezultă că există

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx}{\sqrt{\frac{2\pi}{-th''(0)}}} = 1. \quad \blacksquare$$

3.2.5 Corolar. Fie $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care are proprietățile 1), 4) și 5) din teorema precedentă și

2a). $h(x) < h(0), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

3a). $\exists b, c > 0$ a.î. $h(x) - h(0) \leq -b$, dacă $|x| \geq c$.

Atunci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx \sim e^{t \cdot h(0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-th''(0)}} \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Demonstrație. Funcția $h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h_1(x) = h(x) - h(0), \forall x \in \mathbb{R}$, verifică condițiile teoremei precedente.

3.2.6 Observație. Putem remarca schimbarea de comportament a integralei în funcție de valoarea pe care o ia funcția h în origine. Astfel

$$\begin{aligned} h(0) > 0 &\implies \int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx \rightarrow +\infty \text{ cu viteza lui } e^{th(0)}; \\ h(0) = 0 &\implies \int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx \rightarrow 0 \text{ cu viteza lui } \frac{1}{\sqrt{t}}; \\ h(0) < 0 &\implies \int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(x)} dx \rightarrow 0 \text{ cu viteza lui } e^{th(0)}. \end{aligned}$$

Integrale de tipul $\int_0^{+\infty} e^{-tx} x^\lambda g(x) dx$

3.2.7 Teoremă (Lema lui Watson). Fie $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietățile:

1). g este continuă pe $[0, +\infty)$.

2). $\exists r > 0, \exists (a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \forall x \in [0, r]$.

3). $\exists k > 0, \exists c \in \mathbb{R}$ a.î. $|g(x)| \leq k \cdot e^{cx}, \forall x \in [0, +\infty)$.

Atunci, $\forall \lambda > -1$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} x^\lambda g(x) dx \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \Gamma(\lambda + n + 1) t^{-(\lambda + n + 1)} \quad (t \rightarrow \infty).$$

⊙ Demonstrație.

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $-\lambda < \alpha < 1$; atunci $\lim_{x \rightarrow 0} x^\lambda [e^{-tx} x^\lambda |g(x)|] = 0 < +\infty$ deci $\int_0^\infty e^{-tx} x^\lambda g(x) dx$ este absolut convergentă în 0.

$$|e^{-tx} x^\lambda g(x)| \leq K e^{(-t+c)x} x^\lambda \text{ și deci}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 [e^{-tx} x^\lambda |g(x)|] \leq \lim_{x \rightarrow \infty} K e^{(-t+c)x} x^{\lambda+2} = 0, \text{ dacă } t > c.$$

Rezultă că $\int_0^\infty e^{-tx} x^\lambda g(x) dx$ este absolut convergentă la ∞ când $t > c$.

Deci $\int_0^\infty e^{-tx} x^\lambda g(x) dx$ este absolut convergentă când t este într-o vecinătate a lui $+\infty$.

$$\int_0^\infty e^{-tx} x^\lambda g(x) dx = \underbrace{\int_0^r e^{-tx} x^\lambda g(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_r^\infty e^{-tx} x^\lambda g(x) dx}_{I_2}.$$

Pentru $t > c + 1$ avem

$$\begin{aligned} (1) \quad |I_2| &\leq K \int_r^\infty e^{(-t+c)x} x^\lambda dx = K \int_r^\infty e^{(-t+c+1)x} e^{-x} x^\lambda dx \leq \\ &\leq K e^{(-t+c+1)r} \int_r^\infty e^{-x} x^\lambda dx = K_1 e^{-tr}. \end{aligned}$$

Pentru orice $N \in \mathbb{N}$ definim $r_N(x) = g(x) - \sum_{n=0}^N a_n x^n$.

Să observăm că $r_N(x) = \sum_{n=N+1}^\infty a_n x^n = x^{N+1} \cdot (a_{N+1} + a_{N+2} + \dots) = x^{N+1} \cdot g_1(x)$. Funcția g_1 este continuă pe $[0, r]$ și deci există $L > 0$ a.î.

$$(2) \quad |r_N(x)| \leq L \cdot x^{N+1}, \forall x \in [0, r].$$

$$(3) \quad I_1 = \int_0^r e^{-tx} x^\lambda g(x) dx = \sum_{n=0}^N a_n \cdot \int_0^r e^{-tx} x^{\lambda+n} dx + \int_0^r e^{-tx} x^\lambda r_N(x) dx.$$

Din (2) și (3) rezultă

$$(4) \quad \left| \int_0^r e^{-tx} x^\lambda r_N(x) dx \right| \leq L \cdot \int_0^r e^{-tx} x^{\lambda+N+1} dx.$$

Să evaluăm integralele $I_\alpha(t) = \int_0^r e^{-tx} x^\alpha dx$; facem întâi schimbarea de variabilă $tx = y$ și obținem

$$(5) \quad I_\alpha(t) = \int_0^{tr} e^{-y} t^{-(\alpha+1)} y^\alpha dy = t^{-(\alpha+1)} \left[\int_0^\infty e^{-y} y^\alpha dy - \underbrace{\int_{tr}^\infty e^{-y} y^\alpha dy}_{J(t)} \right] =$$

$$= t^{-(\alpha+1)} \cdot \Gamma(\alpha + 1) - t^{-(\alpha+1)} \cdot J(t).$$

În integrala $J(t)$ facem schimbarea de variabilă $y = tr(1 + u)$ și obținem

$$J(t) = \int_0^\infty e^{-tr} e^{-tru} (tr)^{\alpha+1} (1+u)^\alpha du.$$

Deoarece $1 + u \leq e^u, \forall u \in \mathbb{R}$ obținem

$$J(t) \leq e^{-tr} (tr)^{\alpha+1} \int_0^\infty e^{(-tr+\alpha)u} du = e^{-tr} (tr)^{\alpha+1} \frac{1}{tr - \alpha} \approx$$

$$\approx e^{-tr} (tr)^\alpha \quad (t \rightarrow +\infty)$$

și deci

$$(6) \quad t^{-(\alpha+1)} \cdot J(t) = o(e^{-tr}) \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Din relațiile (4) și (5) obținem

$$\left| \int_0^r e^{-tx} x^\lambda r_N(x) dx \right| \leq L \cdot I_{\lambda+N+1}(t) =$$

$$= L \cdot \Gamma(\lambda + N + 2) \cdot t^{-(\lambda+N+2)} + t^{-(\lambda+N+2)} \cdot J(t).$$

Deoarece $o(e^{-tr}) = O(t^{-(\lambda+N+2)})$ obținem din (6)

$$(7) \quad \int_0^r e^{-tx} x^\lambda r_N(x) dx = O(t^{-(\lambda+N+2)}).$$

Din (3), (5), (6) și (7) rezultă

$$I_1 = \sum_{n=0}^N a_n I_{\lambda+n}(t) + O(t^{-(\lambda+N+2)}) = \sum_{n=0}^N a_n \Gamma(\lambda + n + 1) t^{-(\lambda+n+1)} +$$

$$+o(e^{-tr}) + O(t^{-(\lambda+N+2)})$$

sau

$$(8) \quad I_1 = \sum_{n=0}^N a_n \Gamma(\lambda + n + 1) t^{-(\lambda+n+1)} + O(t^{-(\lambda+N+2)})$$

și deci, $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-tx} x^\lambda g(x) dx &= I_1 + O(e^{-tr}) = \\ &= \sum_{n=0}^N a_n \Gamma(\lambda + n + 1) t^{-(\lambda+n+1)} + O(t^{-(\lambda+N+2)}), \end{aligned}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\int_0^\infty e^{-tx} x^\lambda g(x) dx \approx \sum_{n=0}^\infty a_n \Gamma(\lambda + n + 1) t^{-(\lambda+n+1)} \quad (t \rightarrow \infty). \quad \blacksquare$$

3.2.8 Observație. Rezultatul din teorema precedentă rămâne valabil dacă se înlocuiește semidreapta $[0, +\infty)$ cu intervalul $[0, T)$ cu $T \in \mathbb{R}_+$.

3.2.9 Exemple. 1). Să determine dezvoltarea asimptotică pentru $t \rightarrow +\infty$ a funcției $f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \ln(1+x+x^2) dx$.

În exemplul 3.2.3 am obținut următoarea dezvoltare:

$$\ln(1+x+x^2) = \sum_{n=1}^\infty a_n x^n, \forall x \in [0, \frac{1}{2}), \text{ unde}$$

$$a_{3n-2} = \frac{1}{3n-2}, a_{3n-1} = \frac{1}{3n-1}, a_{3n} = -\frac{2}{3n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultă că funcția $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(1+x+x^2)$, $\forall x \in [0, +\infty)$ este continuă și dezvoltabilă în serie de puteri pe o vecinătate a originii; condiția 3) din lema lui Watson este de asemenea îndeplinită și deci

$$\int_0^\infty e^{-tx} \ln(1+x+x^2) dx \approx \sum_{n=1}^\infty a_n \Gamma(n+1) t^{-(n+1)} \quad (t \rightarrow \infty) \text{ sau}$$

$$\int_0^\infty e^{-tx} \ln(1+x+x^2) dx \approx \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n \cdot n!}{t^{n+1}} \quad (t \rightarrow \infty).$$

2). În exemplul 3.2.3 am arătat că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2} \cdot \ln(1+x+x^2) dx \approx \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n} a_{2n} t^{-(n+\frac{1}{2})} \quad (t \rightarrow \infty)$$

unde $(a_n)_n$ este șirul coeficienților dezvoltării în serie a funcției $g : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(1+x+x^2)$. Vom regăsi acest rezultat ca o aplicație a lemei lui Watson.

Întâi vom transforma integrala

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2} \cdot \ln(1+x+x^2) dx &= \int_{-\infty}^0 e^{-tx^2} \cdot \ln(1+x+x^2) dx + \\ &+ \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cdot \ln(1+x+x^2) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cdot [\ln(1-x+x^2) + \ln(1+x+x^2)] dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cdot \ln(1+x^2+x^4) dx. \end{aligned}$$

Dacă în ultima integrală facem schimbarea de variabilă $x \mapsto \sqrt{x}$ obținem

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-tx} x^{-\frac{1}{2}} \ln(1+x+x^2) dx.$$

Acestei ultime integrale îi putem aplica lema lui Watson și obținem

$$f(t) \approx \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot t^{-(n+\frac{1}{2})} \quad (t \rightarrow \infty)$$

sau

$$f(t) \approx \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \frac{a_n}{2} \cdot t^{-(n+\frac{1}{2})} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Se poate ușor arăta că șirul $(a_n)_n$ verifică relația de recurență $a_n = 2a_{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și regăsim astfel rezultatul anunțat.

O altă aplicație a lemei lui Watson o prezentăm în scțiunea următoare.

Integrale de tipul $\int_{\alpha}^{\beta} e^{-tx^2} h(x) dx$

3.2.10 Teoremă. Fie $\alpha, \beta \in \bar{\mathbb{R}}$ a.î. $\alpha < 0 < \beta$ și fie $h : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietățile:

- 1). $\int_{\alpha}^{\beta} e^{-tx^2} h(x) dx$ este convergentă, oricare ar fi $t > 0$.
- 2). Există $r > 0$ și există un șir $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| \leq r$.
- 3). Există $K, c > 0$ a.î. $|h(x)| \leq K e^{cx}$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

Atunci

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-tx^2} h(x) dx \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot t^{-(n+\frac{1}{2})} \quad (t \rightarrow \infty).$$

⊗ **Demonstrație.** Observăm că $|e^{-tx^2} h(x)| \leq K e^{-tx^2+cx}$ și că integrala $\int_{\alpha}^{\beta} e^{-tx^2+cx} dx$ este convergentă; rezultă că integrala $\int_{\alpha}^{\beta} e^{-tx^2} h(x) dx$ este absolut convergentă.

Efectuăm în integrală schimbarea de variabilă $x = -\sqrt{y}$ pe intervalul $[\alpha, 0]$ și $x = \sqrt{y}$ pe $[0, \beta]$ și obținem

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-tx^2} h(x) dx &= \int_{\alpha}^0 e^{-tx^2} h(x) dx + \int_0^{\beta} e^{-tx^2} h(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\alpha^2} e^{-ty} y^{-\frac{1}{2}} h(-\sqrt{y}) dy + \frac{1}{2} \int_0^{\beta^2} e^{-ty} y^{-\frac{1}{2}} h(\sqrt{y}) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{r^2} e^{-ty} y^{-\frac{1}{2}} [h(-\sqrt{y}) + h(\sqrt{y})] dy + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{r^2}^{\alpha^2} e^{-ty} y^{-\frac{1}{2}} h(-\sqrt{y}) dy + \frac{1}{2} \int_{r^2}^{\beta^2} e^{-ty} y^{-\frac{1}{2}} h(\sqrt{y}) dy. \end{aligned}$$

Observăm că

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \int_{r^2}^{\alpha^2} e^{-ty} y^{-\frac{1}{2}} h(-\sqrt{y}) dy \right| &\leq \frac{K}{2} \int_{r^2}^{\alpha^2} e^{-ty} y^{-\frac{1}{2}} e^{-c\sqrt{y}} dy \leq \\ &\leq \frac{K}{2} \cdot e^{-tr^2} \int_0^{\infty} y^{-\frac{1}{2}} e^{-c\sqrt{y}} dy = K_1 \cdot e^{-tr^2}. \end{aligned}$$

În mod asemănător obținem și inegalitatea

$$\left| \frac{1}{2} \int_{r^2}^{\beta^2} e^{-ty} y^{-\frac{1}{2}} h(\sqrt{y}) dy \right| \leq K_2 \cdot e^{-tr^2}$$

și deci putem utiliza lema lui Watson și observația 3.2.8 pentru a obține

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-tx^2} h(x) dx \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \Gamma\left(-\frac{1}{2} + n + 1\right) \cdot t^{-(-\frac{1}{2} + n + 1)} \quad (t \rightarrow \infty),$$

sau

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-tx^2} h(x) dx \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot t^{-(n + \frac{1}{2})} \quad (t \rightarrow \infty). \quad \blacksquare$$

3.3 Formula lui Stirling

În acest scurt paragraf vom utiliza rezultatele din paragraful precedent pentru a obține diverse forme ale formulei lui Stirling.

Fie $\Gamma : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $\Gamma(t+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^t dx, \forall t > -1$.

Efectuând schimbarea de variabilă $x = t + y$, obținem

$$\Gamma(t+1) = e^{-t} \int_{-t}^{\infty} e^{-y} \cdot (t+y)^t dy = e^{-t} \cdot t^t \int_{-t}^{\infty} e^{-y} \cdot \left(1 + \frac{y}{t}\right)^t dy$$

care după o nouă schimbare de variabilă ($y = tx$) devine

$$\Gamma(t+1) = e^{-t} \cdot t^{t+1} \int_{-1}^{\infty} e^{-tx} \cdot (1+x)^t dx \text{ sau}$$

$$\Gamma(t+1) = e^{-t} \cdot t^{t+1} \int_{-1}^{\infty} e^{t[-x + \ln(1+x)]} dx.$$

Dacă notăm cu $h(x) = -x + \ln(1+x)$, funcția $h : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și $h(x) < h(0) = 0, \forall x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$.

Aplicăm teorema 3.2.4; condițiile 1) și 2) sunt verificate. Deoarece $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$, este verificată și condiția 3).

$h''(0) = -1 < 0$ iar $\int_{-1}^{\infty} e^{h(x)} dx = e \cdot \Gamma(2)$ este convergentă. Atunci, din teorema citată, obținem

$$\int_{-1}^{\infty} e^{th(x)} dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \quad (t \rightarrow \infty) \text{ și deci}$$

$$\Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi t} \cdot \left(\frac{t}{e}\right)^t \quad (t \rightarrow \infty).$$

Aceasta este o primă formă a formulei lui Stirling. Dacă, în particular considerăm șirul $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $t_n = n, \forall n \in \mathbb{N}$, obținem

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Putem încerca să rafinăm formula lui Stirling în felul următor.

În integrala $\int_{-1}^{+\infty} e^{th(x)} dx$ facem schimbarea de variabilă

$$(*) \quad y^2 = -2h(x) = 2x - 2\ln(1+x).$$

Într-o vecinătate a originii putem explicita x ca funcție analitică de y , deci putem obține funcția $x : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ sub forma:

$$x(y) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!} \cdot y + \frac{x''(0)}{2!} \cdot y^2 + \dots$$

sau

$$x(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n, \text{ unde } a_n = \frac{x^{(n)}(0)}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Să determinăm șirul $(a_n)_n$; derivăm relația $(*)$ în raport cu y și obținem

$$x'(y) = (1+x) \cdot \frac{y}{x},$$

$$x''(y) = (1+x) \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^3},$$

$$\begin{aligned} x'''(y) &= (1+x) \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{3y^2 + 2xy^2 - 3x^2}{x^4}, \\ \dots &\quad \dots \end{aligned}$$

$x(0) = 0$ și cum $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{x(y)} = 1$ iar $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2(y) - y^2}{x^3(y)} = \frac{2}{3}$, obținem $x'(0) = 1, x''(0) = \frac{2}{3}, x'''(0) = \frac{1}{6}$. Atunci

$$x(y) = y + \frac{1}{3} \cdot y^2 + \frac{1}{36} \cdot y^3 + \dots$$

de unde

$$x'(y) = 1 + \frac{2}{3} \cdot y + \frac{1}{12} \cdot y^2 + \dots$$

Atunci există $c > 0$ a.î.

$$\begin{aligned} \Gamma(t+1) &= e^{-t} \cdot t^{t+1} \left[\int_{-r}^r e^{-\frac{1}{2}ty^2} \cdot x'(y) dy + O(e^{-ct}) \right] (t \rightarrow \infty) = \\ &= e^{-t} t^{t+1} \left[\int_{-\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\frac{r}{\sqrt{2}}} e^{-tx^2} \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot u + \frac{1}{6} \cdot u^2 + \dots \right) dy + O(e^{-ct}) \right] (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Utilizând teorema 3.2.10 obținem atunci

$$\Gamma(t+1) \approx e^{-t} t^{t+1} \sqrt{2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot t^{-\frac{3}{2}} + \dots \right] (t \rightarrow \infty)$$

sau

$$\Gamma(t+1) \approx \sqrt{2\pi t} \left(\frac{t}{e}\right)^t \cdot \left[1 + \frac{1}{12} \cdot t^{-1} + \dots \right] (t \rightarrow \infty)$$

Bibliografie

[Co] Copson, E.T. - *Asimptotic expansions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1965.

[DB] De Bruijn, N. G. - *Asymptotic methods in analysis*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1958.

Capitolul 4

Algoritmi de integrare utilizați în tehnica de calcul

Utilizarea diverselor softuri pentru calculatoare nu presupune cunoștințe de specialitate asupra principiilor teoretice pe care se bazează acestea ci vizează doar însușirea unor deprinderi de a utiliza comenzi care fac programul să lucreze. Este evident însă că pentru îmbunătățirea acestor softuri și pentru crearea altora noi trebuie îmbinate calitățile informaticianului și cunoștințele specialistului. Consider interesant să exemplific aceasta printr-o problemă punctuală a carei tratare va face obiectul prezentului capitol; problema este: cum procedează un program ca “Mathematica”, “Mathlab” sau “Maple” în fața comenzii de a calcula primitiva unei funcții ? Aparatul matematic care stă la baza algoritmului folosit pentru executarea acestei comenzi include pe lângă metodele clasice de integrare (tabele de primitive imediate, integrare prin părți, substituții, descompuneri în fracții simple ș.a.) și aplicarea unui algoritm al lui Risch, algoritm care are la bază principiul matematic al lui Laplace-Liouville. Acest algoritm asociat cu utilizarea unor funcții suplimentare are drept rezultat calculul primitivelor, pentru funcțiile ce admit primitive exprimabile prin funcții elementare sau răspunsul că astfel de primitive nu există.

Pe scurt principiul lui Laplace-Liouville afirmă că, dacă primitiva unei funcții $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se poate exprima prin funcții elementare (logaritmi și exponențiale) atunci ea este de forma $\sum_{i=1}^n \alpha_i \ln(p_i(z)) + p_0(z)$, unde, pentru orice $i = 1, \dots, n$, p_i sunt funcții raționale în $f(z)$ și z iar α_i sunt constante

numerice. Pentru a demonstra acest rezultat a fost nevoie să se introducă noțiunea de corp Liouville și să se prezinte rezultate relative la extensiile unui corp Liouville prin elemente transcendente ale sale.

În finalul capitolului se dau aplicații ale acestui principiu la găsirea de condiții în care expresii de forma $F(w(z), z)$ au primitive exprimabile prin funcții elementare în w și z , unde $w(z) = \int p(z)dz$. Această problemă este tratată complet în cazurile particulare $F(w(z), z) = A_0(z) \cdot w(z) + A_1(z)$ cu A_0 și A_1 funcții raționale precum și în cazul când F este polinom în w . Condițiile de integrabilitate obținute sunt exprimabile într-o formă algoritmică ce permite scrierea unor programe care să ducă efectiv la exprimarea primitivelor.

4.1 Extinderi de corpuri

În acest paragraf prin corp vom înțelege un corp comutativ.

4.1.1 Definiție. Fie k un subcorp al corpului K ; în acest caz K se mai numește o **extensie** a corpului k .

K se numește o **extensie finită** a lui k dacă există $x_1, \dots, x_n \in K$ așa fel încât, oricare ar fi $x \in K$, x se scrie în mod unic $x = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ cu $a_1, \dots, a_n \in k$. Mulțimea $\{x_1, \dots, x_n\}$ se numește **bază** a extensiei K a corpului k .

4.1.2 Definiție. Fie K o extensie a corpului k ; un element $\theta \in K$ se numește **algebric peste k** dacă există un polinom $f_0 \in k(X)$ așa fel încât $f_0(\theta) = 0$.

Dacă $\theta \in K$ nu este algebric peste k atunci el se numește **transcendent peste k** .

O extensie K a unui corp k se numește **extensie algebrică** dacă orice element al lui K este algebric peste k .

4.1.3 Teoremă. Fie k un corp și fie θ un element algebric peste k ; atunci $k(\theta) = \{f(\theta) : f \in k(X)\}$ este o extensie algebrică a lui k .

$k(\theta)$ este cea mai mică extensie a lui k ce conține θ .

⊗ **Demonstrație.** Deoarece $k(X)$ conține polinoamele constante precum și polinomul identic, $k \subseteq k(\theta)$ și $\theta \in k(\theta)$.

$k(\theta)$ este inel comutativ față de operațiile obișnuite de adunare și înmulțire.

Să arătăm că elementele nenule ale lui $k(\theta)$ admit invers.

Fie $f_0 \in k(X)$ un polinom unitar nenul și ireductibil cu coeficienți din k astfel încât $f_0(\theta) = 0$ și fie $\eta \in k(\theta), \eta \neq 0$; atunci există $f \in k(X)$ așa fel încât $\eta = f(\theta)$. Aplicând teorema împărțirii cu rest, există $q, r \in k(X)$ așa fel încât $f = f_0 \cdot q + r$ și $\text{grad}(r) < \text{grad}(f_0) = n$. Atunci

$$\eta = f(\theta) = f_0(\theta) \cdot q(\theta) + r(\theta) = r(\theta) \neq 0.$$

Deoarece f_0 este ireductibil, f_0 și q sunt prime între ele și deci există $u, v \in k(X)$ așa fel încât $f_0 \cdot u + r \cdot v = 1$; rezultă că $r(\theta) \cdot v(\theta) = 1$ sau $\eta \cdot v(\theta) = 1$ și deci η este inversabil.

Deci $k(\theta)$ este o extensie a lui k ce conține θ . Pe de altă parte este evident că orice altă extensie a lui k ce conține θ va conține și pe $k(\theta)$, de unde rezultă că $k(\theta)$ este cea mai mică extensie a lui k care conține θ .

Să arătăm că $k(\theta)$ este o extensie algebrică.

Așa cum am observat din cele de mai sus, $\forall \eta \in k(\theta), \exists r \in k(X)$ cu $\text{grad}(r) < n$ astfel încât $\eta = r(\theta)$. Deci

$$(*) \quad \begin{cases} \eta = a_0^1 \cdot 1 + a_1^1 \cdot \theta + a_2^1 \cdot \theta^2 + \dots + a_{n-1}^1 \cdot \theta^{n-1} \\ \eta^2 = a_0^2 \cdot 1 + a_1^2 \cdot \theta + a_2^2 \cdot \theta^2 + \dots + a_{n-1}^2 \cdot \theta^{n-1} \\ \dots \\ \eta^{n+1} = a_0^{n+1} \cdot 1 + a_1^{n+1} \cdot \theta + a_2^{n+1} \cdot \theta^2 + \dots + a_{n-1}^{n+1} \cdot \theta^{n-1} \end{cases},$$

unde $a_i^j \in k, \forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \forall j \in \{1, \dots, n+1\}$.

În (*) substituim $\{1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}\}$ din primele n relații în ultima și determinăm un polinom $g \in k(X)$ astfel încât $g(\eta) = 0$ ceea ce va arăta că η este algebric. Practic procedăm în felul următor:

Pentru $j = 1$ există $i_1 \in \{0, \dots, n-1\}$ astfel încât $a_{i_1}^1 \neq 0$ (presupunem că $\eta \neq 0$). Putem astfel determina din prima relație θ^{i_1} în funcție de η și de $\theta^i, i \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{i_1\}$. Înlocuim pe θ^{i_1} astfel determinat în celelalte relații din (*) și obținem

$$(**) \quad \begin{cases} \eta^2 - c_1 \eta = \sum_{i \neq i_1} b_i^2 \cdot \theta^i \\ \eta^3 = \sum_{i \neq i_1} b_i^3 \cdot \theta^i \\ \dots \\ \eta^{n+1} = \sum_{i \neq i_1} b_i^{n+1} \cdot \theta^i \end{cases},$$

unde $c_1 \in k$ și $b_i^j \in k, \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{i_1\}, \forall j \in \{2, \dots, n+1\}$.

Dacă în prima relație din $(**)$ toți coeficienții b_i^2 sunt nuli atunci $g(\eta) = \eta^2 - c_1 \cdot \eta = 0$ și deci η este algebric peste k .

Dacă există $i_2 \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{i_1\}$ așa fel încât $b_{i_2}^2 \neq 0$ atunci, din prima relație din $(**)$, exprimăm pe θ^{i_2} în funcție de $\theta^i, i \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{i_1, i_2\}$ și de η^2, η ; înlocuindu-l în celelalte relații din $(**)$, obținem

$$(***) \quad \begin{cases} \eta^3 - d_1 \cdot \eta^2 - d_2 \cdot \eta = \sum_{i \neq i_1, i_2} c_i^3 \cdot \theta^i \\ \dots \\ \eta^{n+1} = \sum_{i \neq i_1, i_2} c_i^{n+1} \cdot \theta^i \end{cases},$$

unde $d_1, d_2 \in k$ și $c_i^j \in k, \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{i_1, i_2\}, \forall j \in \{3, \dots, n+1\}$, ș.a.m.d.

După cel mult n astfel de înlocuiri obținem o relație de tipul

$$g(\eta) = \eta^{n+1} - e_1 \cdot \eta^n - e_2 \cdot \eta^{n-1} - \dots - e_{n+1} = 0,$$

unde $e_i \in k, \forall i \in \{1, \dots, n+1\}$, ceea ce arată că η este algebric peste k . ■

4.1.4 Observație. $k(\theta)$ este o extensie finită a lui k și admite drept bază mulțimea $\{1, \theta, \dots, \theta^{n-1}\}$.

4.1.5 Teoremă. Fie k un corp și fie θ un element transcendent peste k ; cea mai mică extensie a lui k ce conține pe θ este

$$k(\theta) = \left\{ \frac{f(\theta)}{g(\theta)} : f, g \in k(X) \right\}.$$

Demonstrație. Remarcăm că, pentru orice $g \in k(X), g(\theta) \neq 0$ și deci $k(\theta)$ este corect construit (din definiția elementelor transcendente, se subînțelege existența unei extensii K a lui k ce conține θ ; astfel este bine definită operația $\frac{f(\theta)}{g(\theta)} \in K$).

Este evident că $k(\theta)$ este corp și că $\theta \in k(\theta), k \subseteq k(\theta)$. În plus orice extensie a lui k ce conține θ va conține în mod evident și pe $k(\theta)$. ■

4.1.6 Exemple.

1). Fie $\mathbb{Q}$ corpul numerelor raționale; $\sqrt{2}$ este un element algebric peste $\mathbb{Q}$. Rezultă că $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{f(\sqrt{2}) : f \in \mathbb{Q}(X)\}$. Putem ușor observa că, $\forall f \in \mathbb{Q}(X), f(\sqrt{2}) = a + b \cdot \sqrt{2}$, unde $a, b \in \mathbb{Q}$ și deci

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b \cdot \sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

2). π este transcendent peste $\mathbb{Q}$ și deci

$$\mathbb{Q}(\pi) = \left\{ \frac{f(\pi)}{g(\pi)} : f, g \in \mathbb{Q}(X) \right\}.$$

În cele ce urmează ne vom ocupa de o clasă specială de corpuri - corpurile Liouville.

Corpuri Liouville

Vom aminti câteva definiții și rezultate privitoare la funcțiile complexe de o variabilă complexă.

Fie $\mathbb{C}$ mulțimea numerelor complexe cu structura sa uzuală de corp normat complet și fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă. O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ este derivabilă în $z_0 \in D$ dacă există $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$; această limită se notează cu $f'(z_0)$ și se numește derivata funcției f în z_0 .

Fie $z_0 = x_0 + iy_0$ și $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \forall z = x + iy \in D$; atunci f este derivabilă în z_0 dacă și numai dacă funcțiile reale de două variabile u și v sunt diferențiabile în (x_0, y_0) și sunt verificate condițiile Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}.$$

În acest caz $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Funcția f este olomorfă pe D dacă este derivabilă în toate punctele lui D .

Un punct $z_0 \in D$ este un punct singular izolat pentru f (singularitate aparentă, pol sau singularitate esențială) dacă există un deschis $D_{z_0} \subseteq D$ care conține z_0 așa fel încât funcția f să fie olomorfă pe mulțimea deschisă $D_{z_0} \setminus \{z_0\}$.

Putem acum formula definiția corpurilor Liouville.

4.1.7 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și fie $R(D)$ o mulțime de funcții $f : D \setminus I_f \rightarrow \mathbb{C}$ care admit, fiecare în parte, o mulțime cel mult numărabilă de singularități izolate I_f ; $R(D)$ se numește **corp Liouville** de funcții pe D dacă sunt îndeplinite condițiile:

- a). $(R(D), +, \cdot)$ este corp față de operațiile uzuale de adunare și înmulțire și $\mathbb{C} \subseteq R(D)$ ($R(D)$ conține funcțiile constante).
- b). $\forall f \in R(D)$, f este uniformă și olomorfă pe $D \setminus I_f$.
- c). $\forall f \in R(D)$, $f' \in R(D)$.

Când mulțimea D este subînțeleasă vom nota R în loc de $R(D)$.

4.1.8 Exemplu. Cel mai simplu exemplu de corp Liouville îl constituie corpul funcțiilor complexe raționale:

$$R = \left\{ \frac{P(z)}{Q(z)} : P, Q \in \mathbb{C}(X) \right\}.$$

Este evident că R este un corp ce conține funcțiile constante; $\forall P, Q \in \mathbb{C}(X)$ (deci P și Q polinoame cu coeficienți complexi), $\frac{P}{Q}$ este o funcție uniformă și olomorfă pe $\mathbb{C}$ cu excepția unui număr finit de poli. De asemenea

$$\left(\frac{P}{Q} \right)' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2} \in R.$$

Corpurile Liouville fiind corpuri algebrice admit extensii față de elemente algebrice sau transcendente; ne interesează în ce condiții astfel de extensii sunt la rândul lor corpuri Liouville.

Fie $\theta : D \setminus I_\theta \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție uniformă și olomorfă pe D cu excepția unei mulțimi cel mult numărabile de singularități izolate I_θ și fie $R(D)$ un corp Liouville pe D ; să presupunem că θ este un element algebric peste $R(D)$, deci că există un polinom P_0 cu coeficienți din $R(D)$ așa fel încât $P_0(\theta) = 0$. Teorema 4.1.3 ne asigură că $\{P(\theta) : P \in R(D)(X)\}$ este cea mai mică extensie algebrică a lui $R(D)$ ce conține θ ; această extensie nu conține însă în mod obligatoriu și pe θ' și astfel nu este corp Liouville.

4.1.9 Teoremă. Fie R un corp Liouville de funcții pe deschisul $D \subseteq \mathbb{C}$ și fie $\theta : D \setminus I_\theta \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție uniformă și olomorfă pe D cu excepția unei mulțimi cel mult numărabile de singularități izolate I_θ ; vom nota cu

$$R(\theta) = \left\{ \frac{P(\theta)}{Q(\theta)} : P, Q \in R(X), Q(\theta) \neq 0 \right\}.$$

Condiția necesară și suficientă pentru ca $R(\theta)$ să fie corp Liouville pe D este ca $\theta' \in R(\theta)$. În acest caz $R(\theta)$ este cea mai mică extensie Liouville a lui R care conține pe θ .

Demonstrație. Este evident că $R(\theta)$ este corp față de operațiile uzuale de adunare și de înmulțire și că $R(\theta)$ este o extensie a lui R ce conține θ . De asemenea se poate ușor observa că orice funcție f din $R(\theta)$ este uniformă și olomorfă pe $D \setminus I_f$, unde I_f este o mulțime de singularități izolate ale lui f cel mult numărabilă. Rezultă că $R(\theta)$ va fi corp Liouville peste D dacă și numai dacă, $\forall f \in R(\theta), f' \in R(\theta)$.

Dacă $R(\theta)$ este corp Liouville atunci în mod evident $\theta' \in R(\theta)$.

Reciproc, presupunem că $\theta' \in R(\theta)$ și fie $f \in R(\theta)$ o funcție arbitrară. Atunci există două polinoame $P, Q \in R(X)$ cu $Q(\theta) \neq 0$ așa fel încât

$$f(z) = \frac{P(\theta(z))}{Q(\theta(z))}, \forall z \in D \setminus I_f. \text{ În acest caz}$$

$$f'(z) = \frac{P'(\theta(z)) \cdot Q(\theta(z)) - P(\theta(z)) \cdot Q'(\theta(z))}{Q^2(\theta(z))} \cdot \theta'(z).$$

Cum $\theta' \in R(\theta)$, există $P_1, Q_1 \in R(X)$ cu $Q_1(\theta) \neq 0$ așa fel încât $\theta'(z) = \frac{P_1(\theta(z))}{Q_1(\theta(z))}, \forall z \in D \setminus I_\theta$; atunci

$$f' = \frac{[P'(\theta) \cdot Q(\theta) - P(\theta) \cdot Q'(\theta)] \cdot P_1(\theta)}{Q^2(\theta) \cdot Q_1(\theta)} = \frac{P_2(\theta)}{Q_2(\theta)}$$

cu $P_2, Q_2 \in R(X)$ și $Q_2(\theta) \neq 0$.

Rezultă că $f' \in R(\theta)$ și deci $R(\theta)$ este corp Liouville.

Este evident că orice extensie Liouville a lui R ce conține θ conține și $R(\theta)$. ■

4.1.10 Corolar. Fie R un corp Liouville de funcții pe deschisul $D \subseteq \mathbb{C}$ și fie $\theta : D \setminus I_\theta \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție uniformă și olomorfă pe D cu excepția unei mulțimi cel mult numărabile de singularități izolate I_θ așa fel încât θ este element algebric peste R .

Atunci $R(\theta) = \left\{ \frac{P(\theta)}{Q(\theta)} : P, Q \in R(X), Q(\theta) \neq 0 \right\}$ este extensia Liouville a lui R ce conține θ .

Demonstrație. Conform teoremei precedente $R(\theta)$ este corp Liouville pe D dacă și numai dacă $\theta' \in R(\theta)$. Deoarece θ este algebric peste R , există un polinom de grad minim $P_0 \in R(X)$ așa fel încât $P_0(\theta) = 0$; să presupunem că $P_0(X) = a_0 \cdot X^n + a_1 \cdot X^{n-1} + \dots + a_n$, cu $a_0, \dots, a_n \in R$. Deci

$$a_0(z) \cdot \theta^n(z) + a_1(z) \cdot \theta^{n-1}(z) + \dots + a_n(z) \equiv 0.$$

Dacă derivăm această identitate obținem

$$\begin{aligned} & [a'_0(z) \cdot \theta^n(z) + a'_1(z) \cdot \theta^{n-1}(z) + \cdots + a'_n(z)] + \\ & + [na_0(z) \cdot \theta^{n-1}(z) + (n-1)a_1(z) \cdot \theta^{n-2}(z) + \cdots + a_{n-1}(z)] \cdot \theta'(z) = 0. \end{aligned}$$

Polinoamele $P(X) = a'_0 \cdot X^n + a'_1 \cdot X^{n-1} + \cdots + a'_n$ și $Q(X) = na_0 \cdot X^{n-1} + (n-1)a_1 \cdot X^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$ sunt din $R(X)$ și $\text{grad}(Q) < n$. Rezultă că $Q(\theta) \neq 0$. Atunci $\theta' = \frac{-P(\theta)}{Q(\theta)} \in R(\theta)$; deci $R(\theta)$ este corp Liouville. ■

Dacă θ este transcendent peste R , $R(\theta)$ nu este, în caz general, corp Liouville. Totuși există unele elemente transcendente remarcabile θ pentru care $R(\theta)$ este corp Liouville. Înainte de a le prezenta vom reaminti definițiile câtorva dintre funcțiile complexe elementare.

4.1.11 Funcția exponențială. Aplicația $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dată prin $f(z) = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$, $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ definește o funcție pe $\mathbb{C}$ pe care o numim funcția exponențială și o notăm cu $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$.

Partea reală u și partea imaginară v sunt definite prin $\begin{cases} u(x, y) = e^x \cdot \cos y \\ v(x, y) = e^x \cdot \sin y \end{cases}$.

Observăm că u și v sunt funcții diferențiabile pe $\mathbb{R}^2$ și că verifică condițiile Cauchy-Riemann în orice punct $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Rezultă că f este olomorfa pe $\mathbb{C}$ și că $f'(z) = e^z = f(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Reamintim următoarele două formule utile în analiza complexă:

$$\begin{aligned} e^z &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n, \forall z \in \mathbb{C}, \\ e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \forall z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Funcția exponențială are câteva proprietăți ce se deduc imediat din definiție:

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ e^{z+2\pi i} &= e^z, \forall z \in \mathbb{C}, \\ e^{iy} &= \cos y + i \sin y, \forall y \in \mathbb{R}, \\ e^0 &= 1, e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Cu ajutorul acestei funcții putem introduce alte două funcții olomorfe pe $\mathbb{C}$, funcțiile “sinus” și “cosinus”:

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \end{aligned}$$

4.1.12 Funcția logaritm. Funcția multiformă $\text{Log} : \mathbb{C}^* \rightarrow 2^{\mathbb{C}}$ definită prin $\text{Log}(z) = \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}, \forall z \in \mathbb{C}^*$, o numim funcție logaritm.

Dacă $z = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z)$ este forma trigonometrică a numărului $z \in \mathbb{C}^*$, atunci $|z| > 0$ și

$$\text{Log}(z) = \{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Pentru fiecare $k \in \mathbb{Z}$ funcția definită prin

$$\text{Log}_k(z) = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \forall z \in \mathbb{C}^*,$$

se numește ramură a funcției logaritm.

Ramurile acestei funcții nu sunt funcții uniforme pe $\mathbb{C}^*$; ele sunt uniforme dacă considerăm restricțiile lor la $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \leq 0, \text{Im}(z) = 0\}$. Astfel, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\log_k : D \rightarrow \mathbb{C}, \log_k(z) = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi),$$

este ramură uniformă a funcției logaritm; aceasta este și olomorvă pe D și $(\log_k(z))' = \frac{1}{z}, \forall z \in D$.

$\log_0$ se numește ramura principală a logaritmului și se notează cu $\log$:

$$\log : D \rightarrow \mathbb{C}, \log(z) = \ln |z| + i \arg z, \forall z \in D.$$

Funcțiile exponențială și logaritm permit construcția altor funcții complexe multiforme: funcția putere, funcția radical, funcțiile trigonometrice inverse.

În continuare vom prezenta două exemple remarcabile de extensii Liouville.

4.1.13 Exemple. Fie R un corp Liouville peste deschisul $D \subseteq \mathbb{C}$ și fie $u \in R$ o funcție ne-identică nulă.

(i) Elementul $\theta : D \setminus \{z : u(z) = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definit prin $\theta(z) = \log(u(z))$, este, în general, transcendent peste R (presupunem că restrângem convenabil domeniul D pentru a uniformiza ramurile funcției logaritm).

Observăm că $\theta'(z) = \frac{u'(z)}{u(z)}$ și deci

$$\theta' \in R \subseteq R(\theta) = \left\{ \frac{a_0 \log^n(u) + \cdots + a_n}{b_0 \log^m(u) + \cdots + b_m} : a_i, b_j \in R \right\}.$$

Conform teoremei 4.1.9, $R(\theta)$ este corp Liouville; el se numește extensia logaritmică Liouville a lui R .

(ii) Elementul $\theta : D \rightarrow \mathbb{C}$, definit prin $\theta(z) = e^{u(z)}$, este element transcendent peste R ; deoarece $\theta'(z) = u'(z) \cdot \theta(z)$, rezultă că $\theta' \in R(\theta)$ și deci, din teorema 4.1.9,

$$R(\theta) = \left\{ \frac{a_0 e^{nu(z)} + \dots + a_n}{b_0 e^{mu(z)} + \dots + b_m} : a_i, b_j \in R \right\}$$

este corp Liouville; el se numește extensia exponențială Liouville a lui R .

4.1.14 Definiții.

(i) Dacă R este un corp Liouville și θ este un element algebric peste R , $R(\theta)$ se numește **extensie algebrică Liouville** a lui R .

O extensie Liouville a lui R se numește **extensie de rang zero** dacă ea se realizează după un număr finit de extensii algebrice Liouville ale lui R .

(ii) Dacă R este un corp Liouville și θ este un element transcendent peste R așa fel încât $R(\theta)$ este corp Liouville atunci $R(\theta)$ se numește **extensie transcendentă Liouville** a lui R . Extensiile logaritmice și exponențiale prezentate în 4.1.13 (i) și (ii) se numesc **extensii elementare**.

(iii) O extensie Liouville a lui R se numește **extensie Liouville de rang n** , ($n \geq 1$) dacă se obține după un număr de n extensii transcendente Liouville peste R . Dacă aceste extensii sunt elementare (deci sunt extensii logaritmice și/sau exponențiale) atunci ele se numesc **extensii elementare de rang n** . O extensie Liouville R_1 a lui R se numește **extensie Liouville elementară** dacă există $n \in \mathbb{N}$ așa fel încât R_1 să fie extensie elementară de rang n .

(iv) O funcție Φ este **elementară** în raport cu un corp Liouville R dacă Φ aparține unei extensii elementare a lui R .

4.2 Principiul Laplace-Liouville

Funcțiile exponențială și logaritmică stau la baza construcțiilor celorlalte funcții elementare cunoscute: funcțiile trigonometrice, funcțiile trigonometrice inverse, funcția putere, funcția radical (caz particular al funcției putere).

Extensiile elementare, ca extensii Liouville efectuate prin funcții exponențiale și logaritmice, sunt deci suficiente pentru a acoperi extensiile unui corp Liouville efectuate prin alte funcții elementare.

Fie R un corp Liouville peste $D \subseteq \mathbb{C}$ și fie $\phi \in R$; ne întrebăm în ce condiții o primitivă Φ a funcției ϕ pe D aparține unei extensii Liouville elementare a lui R . Răspunsul la această întrebare îl dă principiul lui Laplace-Liouville, principiu pe care îl prezentăm mai jos fără demonstrație.

4.2.1 Teoremă (principiul lui Laplace-Liouville). *Fie R un corp Liouville peste $D \subseteq \mathbb{C}$ și fie $\phi \in R$; o primitivă a lui ϕ , $\Phi : D \setminus I_\Phi \rightarrow \mathbb{C}$ aparține unei extensii Liouville elementare de rang $n \in \mathbb{N}$ dacă și numai dacă există $n + 1$ funcții $u_0, u_1, \dots, u_n \in R$ și n constante $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ așa fel încât*

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \log(u_j(z)) + u_0(z), \forall z \in D \setminus I_\Phi.$$

Dată o funcție $\phi \in R$ ne interesează dacă primitiva sa Φ aparține unei extensii elementare a lui R , adică dacă există $n \in \mathbb{N}$ așa fel încât Φ să aparțină unei extensii elementare de rang n . Dacă $n = 0$ atunci Φ trebuie să aparțină unei extensii obținute printr-un număr finit de extensii algebrice și deci, după teorema 4.1.3 și corolarul 4.1.10, Φ trebuie să fie algebrică peste R .

Vom prezenta o aplicație imediată a principiului Laplace-Liouville.

4.2.2 Exemplu. Fie R corpul Liouville al funcțiilor raționale (vezi exemplul 4.1.8) și $\phi : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$; atunci $\phi \in R$.

Ne întrebăm cum procedează un program conceput să răspundă la întrebarea: ϕ admite primitive elementare peste R ? (presupunem că acest program nu ar dispune de un tabel de primitive elementare ci ar utiliza doar principiul Laplace-Liouville).

Fie deci Φ o primitivă a lui ϕ ; dacă presupunem că Φ este elementară față de R , atunci există $n \in \mathbb{N}$ așa fel încât Φ să aparțină unei extensii elementare de rang n a lui R . Conform principiului Laplace-Liouville există $u_0, u_1, \dots, u_n \in R$ și $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ așa fel încât

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \log(u_j(z)) + u_0(z).$$

Dacă presupunem că $n = 0$ atunci $\Phi = u_0 \in R$ ceea ce este absurd. Într-adevăr, în acest caz ar exista $P, Q \in \mathbb{C}(X)$ așa fel încât $\Phi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ și

atunci $\Phi'(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{P'(z) \cdot Q(z) - P(z) \cdot Q'(z)}{Q^2(z)}$ ceea ce este imposibil deoarece ϕ nu admite poli multipli.

Presupunem $n = 1$ și deci $\Phi(z) = \alpha_1 \log(u_1(z)) + u_0(z)$; deoarece $u_0, u_1 \in R$, există polinoamele $P_0, Q_0, P_1, Q_1 \in \mathbb{C}(X)$ așa fel încât $u_0 = \frac{P_0}{Q_0}$ și $u_1 = \frac{P_1}{Q_1}$ și deci

$$\Phi = \alpha_1 \cdot \log\left(\frac{P_1}{Q_1}\right) + \frac{P_0}{Q_0}.$$

Derivând relația precedentă obținem

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \alpha_1 \cdot \left(\frac{P'_1(z)}{P_1(z)} - \frac{Q'_1(z)}{Q_1(z)} \right) + \frac{P'_0 \cdot Q_0 - P_0 \cdot Q'_0}{Q_0^2}.$$

Cum ϕ nu admite poli multipli $u'_0 = \frac{P'_0 \cdot Q_0 - P_0 \cdot Q'_0}{Q_0^2} = 0$ și deci u_0 este o funcție constantă $c \in \mathbb{C}$. Remarcăm de asemenea că $P_1(z) = z + i$ și $Q_1(z) = z - i$ și deci $\frac{1}{z^2 + 1} = \alpha_1 \cdot \left(\frac{1}{z + i} - \frac{1}{z - i} \right)$ de unde $\alpha_1 = -\frac{1}{2i}$. Deci

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \int \frac{dz}{z^2 + 1} = -\frac{1}{2i} \cdot \log\left(\frac{z + i}{z - i}\right) + c = \frac{1}{2i} \cdot \log\left(\frac{z + i}{z - i}\right) + c = \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \left[\log(-1) + \log\left(\frac{i - z}{i + z}\right) \right] + c = \frac{1}{2i} \cdot (\pi i) + \frac{1}{2i} \cdot \log\left(\frac{i - z}{i + z}\right) + c = \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \log\left(\frac{i - z}{i + z}\right) + \frac{\pi}{2} + c. \end{aligned}$$

Rezultatul nu este surprinzător deoarece funcția “arctangentă”, w , se obține din rezolvarea ecuației $z = \operatorname{tg} w = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}$; se obține imediat

$$w = \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \cdot \log\left(\frac{i - z}{i + z}\right).$$

4.3 Cazuri particulare

În acest paragraf ne propunem să analizăm câteva clase de funcții pentru care, utilizând principiul Laplace-Liouville, să decidem asupra condițiilor în care

acestea admit primitive exprimabile prin funcții elementare și să calculăm aceste primitive.

Vom preciza condițiile în care lucrăm. Fie R un corp Liouville peste $D \subseteq \mathbb{C}$ și fie $p \in R$ așa fel încât primitiva sa w ($w' = p$) este transcendentă peste R .

Deoarece $w' = p \in R \subseteq R(w)$ rezultă din teorema 4.1.9 că $R(w) = \left\{ \frac{P(w)}{Q(w)} : P, Q \in R(X) \right\}$ este corp Liouville peste D ($R(w)$ este cea mai mică extensie Liouville a lui R care conține transcendentă w).

În cele ce urmează vom prezenta condițiile în care integrale de tipul $\int f(w, z) dz$ sunt elementare peste $R(w)$ unde $f : \mathbb{C} \times D \rightarrow \mathbb{C}$ are proprietatea că $f(w, z) = A_0(z) \cdot w + A_1(z)$ sau, mai general, $f(w, z) = \sum_{k=0}^n C_n^k A_k(z) \cdot w^{n-k}$.

Integrarea expresiilor de forma $A_0 w + A_1$

4.3.1 Teoremă.

Fie R un corp Liouville pe domeniul $D \subseteq \mathbb{C}$ și fie $p \in R$ așa fel încât $w(z) = \int p(z) dz$ definește un element transcendent peste R . Fie $A_0, A_1 \in R$; condiția necesară și suficientă pentru ca $\int [A_0(z)w(z) + A_1(z)] dz$ să definească o funcție elementară în raport cu $R(w)$ este ca să existe $c \in \mathbb{C}, a \in R$ și o funcție A elementară în raport cu R așa fel încât:

$$\begin{cases} A_0(z) = c \cdot p(z) + a'(z), \\ A_1(z) = a(z) \cdot p(z) + A'(z). \end{cases}$$

În acest caz

$$\int [A_0(z) \cdot w(z) + A_1(z)] dz = \frac{c}{2} \cdot w^2(z) + a(z) \cdot w(z) + A(z).$$

Integrala de mai sus definește o funcție din $R(w)$ dacă și numai dacă $A \in R$.

⊖ **Demonstrație.** Așa cum am precizat mai sus, cel mai mic corp Liouville ce conține R și w este $R(w) = \left\{ \frac{P(w)}{Q(w)} : P, Q \in R(X) \right\}$.

Necesitatea. Presupunem că $F(w, z) = \int [A_0(z)w(z) + A_1(z)] dz$ definește o funcție elementară în raport cu $R(w)$; conform principiului Laplace-Liouville, există $n \in \mathbb{N}$, există $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ și există $u_0, u_1, \dots, u_n \in R(w)$ așa

fel încât

$$F(w, z) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \log(u_k(w, z)) + u_0(w, z).$$

Derivând relația de mai sus după variabila w obținem:

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \frac{1}{u_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial w} + \frac{\partial u_0}{\partial w}.$$

Deoarece u_k sunt funcții raționale în w , $\frac{\partial u_k}{\partial w}$ sunt de asemenea raționale în w și deci $\frac{\partial F}{\partial w} \in R(w)$. Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} F(w(z), z) &= A_0(z) \cdot w(z) + A_1(z) = \frac{\partial F}{\partial w}(w(z), z) \cdot w'(z) + \frac{\partial F}{\partial z}(w(z), z) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial w}(w(z), z) \cdot p(z) + \frac{\partial F}{\partial z}(w(z), z) \end{aligned}$$

de unde rezultă că $\frac{\partial F}{\partial z} \in R(w)$. Rezultă deci că

$$\frac{\partial F}{\partial w}, \frac{\partial F}{\partial z} \in R(w).$$

Din relația precedentă rezultă

$$(1) \quad A_0 \cdot w + A_1 = \frac{\partial F}{\partial w} \cdot p + \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Deoarece w este transcendent peste R relația (1) este o identitate în w (altfel (1) ar conduce la o ecuație polinomială în w cu coeficienți din R ceea ce ar nega transcendența lui w). Deci

$$(2) \quad A_0(z) \cdot w(z) + A_1(z) \equiv_w \frac{d}{dz} F(w(z), z).$$

Din (2) rezultă că, oricare ar fi $\gamma \in \mathbb{C}$,

$$(3) \quad A_0(z)[w(z) + \gamma] + A_1(z) = \frac{d}{dz} F(w(z) + \gamma, z)$$

sau, integrând după z de la $c_0 \in \mathbb{C}$ la $z \in \mathbb{C}$,

$$(4) \quad \int_{c_0}^z \{A_0(z)[w(z) + \gamma] + A_1(z)\} dz = F(w(z) + \gamma, z) - F(w(c_0) + \gamma, c_0).$$

Notăm $-F(w(c_0) + \gamma, c_0) = c(\gamma)$ și deci

$$(5) \quad \int_{c_0}^z \{A_0(z)[w(z) + \gamma] + A_1(z)\} dz = F(w(z) + \gamma, z) + c(\gamma).$$

Derivăm relația (5) după γ de două ori și obținem pe rând

$$(6) \quad \int_{c_0}^z A_0(z) dz = \frac{\partial F}{\partial w}(w(z) + \gamma, z) + c'(\gamma),$$

$$(7) \quad 0 = \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}(w(z) + \gamma, z) + c''(\gamma).$$

Dacă în (7) facem $\gamma = 0$ și notăm $c = -c''(0) \in \mathbb{C}$, obținem

$$(8) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}(w, z) = c.$$

Din (8) rezultă că există $a_1 : D \rightarrow \mathbb{C}$ așa fel încât

$$(9) \quad \frac{\partial F}{\partial w}(w, z) = c \cdot w + a_1(z)$$

și cum $\frac{\partial F}{\partial w} \in R(w)$ iar w este transcendent peste R , relația (9) este o identitate în w . Rezultă că dacă în (9) îi dăm lui w o valoare constantă w_0 , $a_1(z) = \frac{\partial F}{\partial w}(w_0, z) - c \cdot w_0 \in R$.

Observăm că membrul întâi din relația (6) nu depinde de γ și deci

$$(6') \quad \int_{c_0}^z A_0(z) dz = \frac{\partial F}{\partial w}(w, z) + c'(0).$$

Înlocuim (9) în (6') și obținem

$$(10) \quad \int_{c_0}^z A_0(z) dz = c \cdot w(z) + a_1(z) + c'(0)$$

sau, dacă notăm $a(z) = a_1(z) + c'(0)$, atunci $a \in R$ și

$$(11) \quad \int_{c_0}^z A_0(z) dz = c \cdot w(z) + a(z).$$

Derivând relația (11) după z , rezultă

$$(12) \quad A_0(z) = c \cdot p(z) + a'(z), \text{ unde } c \in \mathbb{C} \text{ și } a \in R.$$

Rezultă atunci că

$$\begin{aligned} F(w, z) &= \int [c \cdot p(z) \cdot w(z) + a'(z) \cdot w(z) + A_1(z)] dz = \\ &= \frac{c}{2} \cdot w^2(z) + a(z) \cdot w(z) + \int [A_1(z) - a(z) \cdot p(z)] dz. \end{aligned}$$

Să notăm acum

$$H(w, z) = \int [A_1(z) - a(z) \cdot p(z)] dz = F(w, z) - \frac{c}{2} \cdot w^2(z) - a(z) \cdot w(z).$$

Atunci H este elementară în raport cu $R(w)$ și, aplicându-i acestei funcții principiul Laplace-Liouville, există $m \in \mathbb{N}$, există $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{C}$ și există $v_0, v_1, \dots, v_m \in R(w)$ așa fel încât

$$(13) \quad H(w, z) = \sum_{k=1}^m \beta_k \cdot \log(v_k(w, z)) + v_0(w, z).$$

La fel cum am demonstrat pentru funcția F obținem:

$$\frac{\partial H}{\partial w}, \frac{\partial H}{\partial z} \in R(w)$$

și, deoarece w este transcendentă în raport cu R , relația următoare (obținută prin derivarea după z a lui H)

$$(14) \quad A_1(z) - a(z) \cdot p(z) = \frac{\partial H}{\partial w}(w, z) \cdot p(z) + \frac{\partial H}{\partial z}(w, z)$$

este o identitate în w și deci, pentru orice $\gamma \in \mathbb{C}$,

$$(15) \quad A_1(z) - a(z) \cdot p(z) = \frac{d}{dz} H(w(z) + \gamma, z).$$

Integrăm această relație după z de la $c_0 \in \mathbb{C}$ la $z \in \mathbb{C}$ și obținem

$$(16) \quad \int_{c_0}^z [A_1(z) - a(z) \cdot p(z)] dz = H(w(z) + \gamma, z) - H(w(c_0) + \gamma, c_0)$$

sau, notând $-H(w(c_0) + \gamma, c_0) = c_1(\gamma)$,

$$(17) \quad \int_{c_0}^z [A_1(z) - a(z) \cdot p(z)] dz = H(w(z) + \gamma, z) + c_1(\gamma).$$

Derivăm acum (17) după γ și obținem

$$(18) \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial w}(w + \gamma, z) + c'_1(\gamma).$$

Fie acum $c_1 = -c'_1(0) \in \mathbb{C}$; din (18) rezultă deci

$$(19) \quad \frac{\partial H}{\partial w}(w, z) = c_1$$

de unde rezultă că există o funcție $A : D \rightarrow \mathbb{C}$ așa fel încât

$$(20) \quad H(w, z) = c_1 \cdot w + A(z).$$

Funcția $H(w, z) - c_1 \cdot w = A(z)$ nu depinde de w și deci $A(z) = H(w_0, z) - c_1 \cdot w_0$, unde w_0 este fixat în $\mathbb{C}$. Din relațiile (13) și (20) deducem că

$$A(z) = \sum_{k=1}^m \beta_k \cdot \log(v_k(w_0, z) + v_0(w_0, z) - c_1 \cdot w_0).$$

Deoarece funcțiile $v_0(w_0, \cdot), \dots, v_m(w_0, \cdot) \in R$ rezultă că A este funcție elementară în raport cu R .

Observăm că membrul întâi din relația (17) nu depinde de γ și deci

$$(21) \quad \int [A_1(z) - a(z) \cdot p(z)] dz = H(w, z) + c_1(0).$$

Derivând ultima relație după z obținem

$$A_1(z) - a(z) \cdot p(z) = c_1 \cdot p(z) + A'(z), \text{ sau}$$

$$(22) \quad A_1(z) = (a(z) + c_1) \cdot p(z) + A'(z).$$

Se observă acum că putem renota cu a funcția $a + c_1$ și obținem din nou o funcție din R astfel încât

$$\begin{cases} A_0(z) = c \cdot p(z) + a'(z), \\ A_1(z) = a(z) \cdot p(z) + A'(z), \end{cases} \quad \text{unde } A \text{ este elementară în raport cu } R.$$

Suficiența. Presupunem că există $c \in \mathbb{C}$, $a \in R$ și A elementară în raport cu R astfel încât să fie verificate condițiile teoremei. Atunci

$$\begin{aligned} \int [A_0(z) \cdot w(z) + A_1(z)] dz &= \int [c \cdot p(z) \cdot w(z) + a'(z) \cdot w(z) + a(z) \cdot p(z) + A'(z)] dz \\ &= \frac{c}{2} \cdot w^2(z) + a(z) \cdot w(z) + A(z) \end{aligned}$$

și deci primitiva lui $A_0(z) \cdot w(z) + A_1(z)$ este elementară în raport cu $R(w)$.

Putem remarca imediat că această primitivă este chiar în $R(w)$ dacă și numai dacă $A \in R$. ■

4.3.2 Exemple. (i) Se consideră integrala:

$$F(w, z) = \int \left[\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{(z+1)^2} \right) \cdot w(z) + \left(\frac{z-1}{z(z+1)} + \frac{2}{z} + z \right) \right] dz,$$

unde

a). $w(z) = \log z$ sau

b). $w(z) = \operatorname{arctg} z$.

Se observă că, dacă notăm $A_0(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{(z+1)^2}$ și $A_1(z) = \frac{z-1}{z(z+1)} + \frac{2}{z} + z$, $A_0, A_1 \in R$, unde R notează corpul Liouville al funcțiilor raționale (vezi exemplul 4.1.8). În ambele cazuri w este transcendent în raport cu R și $w' = p \in R$ (în cazul a) $w'(z) = \frac{1}{z}$ iar în cazul b) $w'(z) = \frac{1}{z^2+1}$).

Observăm de asemenea că a doua condiție din teorema precedentă, $A_1 = a \cdot p + A'$ conduce la $A' = A_1 - a \cdot p \in R$ ($a \in R$ din prima condiție). Deoarece A' este o funcție rațională A va fi o funcție elementară față de R (primitiva oricărei funcții raționale este o combinație de funcții raționale, funcții logaritm și arctangente și deci aparține unei extensii elementare ale lui R).

Rezultă că integrala va fi elementară față de $R(w)$ dacă și numai dacă putem găsi un număr complex c și o funcție $a \in R$ așa fel încât $A_0(z) = c \cdot p(z) + a'(z)$.

În cazul a) ultima relație revine la

$$\frac{1}{z} + \frac{2}{(z+1)^2} = \frac{c}{z} + a'(z).$$

Se observă că, dacă în relația de mai sus alegem $c = 1$, obținem $a(z) = -\frac{2}{z+1} + c_1$ și deci $a \in R$. Putem determina atunci și A din relația

$$A'(z) = \frac{z-1}{z(z+1)} + \frac{2}{z} + z + \left(\frac{2}{z+1} - c_1 \right) \cdot \frac{1}{z} = \frac{3-c_1}{z} + z.$$

Dacă $c_1 = 3$ rezultă că $A(z) = \frac{z^2}{2}$. Se observă că $A \in R$ și că primitiva este dată de

$$F(w(z), z) = \frac{1}{2} \cdot w^2(z) + \frac{3z+1}{z+1} \cdot w(z) + \frac{z^2}{2}.$$

Remarcăm că $F(w, \cdot) \in R(w)$.

În cazul b) obținem relația

$$\frac{1}{z} + \frac{2}{(z+1)^2} = \frac{c}{z^2+1} + a'(z)$$

de unde

$$a(z) = \log z - \frac{2}{z+1} - c \cdot \operatorname{arctg} z.$$

Observăm că, indiferent ce valoare dăm lui $c \in \mathbb{C}$, $a \notin R$. Rezultă că integrala nu este elementară față de $R(\operatorname{arctg})$.

(ii) Să considerăm integrala:

$$F(w(z), z) = \int \left[\left(\frac{1}{z} + z \cdot e^{z^2} \right) \cdot w(z) + \frac{1}{2z} \cdot e^{z^2} + 1 \right] dz,$$

unde $w(z) = \log z$.

Dacă notăm cu $A_0(z) = \frac{1}{z} + z \cdot e^{z^2}$ și cu $A_1(z) = \frac{1}{2z} \cdot e^{z^2} + 1$ observăm că $A_0, A_1 \in R_1 = R(e^{z^2})$, unde R este corpul funcțiilor raționale iar R_1 este extensia Liouville a acestuia cu transcendentă e^{z^2} . Vrem să verificăm dacă $F(w, \cdot)$ este elementară față de $R_1(w)$. Condițiile din teorema precedentă se scriu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} + z \cdot e^{z^2} &= \frac{c}{z} + a'(z) \\ \frac{1}{2z} \cdot e^{z^2} + 1 &= \frac{a(z)}{z} + A'(z). \end{aligned}$$

Din prima condiție, considerând $c = 1$ obținem $a(z) = \frac{1}{2} \cdot e^{z^2}$. Înlocuind în condiția a doua pe a obținem $A(z) = z$ și deci integrala:

$$F(w(z), z) = \frac{1}{2} \cdot \log^2 z + \frac{1}{2} \cdot e^{z^2} \cdot \log z + z.$$

Integrarea unui polinom în w

4.3.3 Teoremă. Fie R un corp Liouville pe domeniul $D \subseteq \mathbb{C}$, fie $p \in R$ așa fel încât $w(z) = \int p(z)dz$ definește un element transcendent peste R și fie $A_0, A_1, \dots, A_n \in R$.

Condiția necesară și suficientă ca $\int \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot A_k(z) \cdot w^{n-k}(z) dz$ să definească o funcție elementară în raport cu $R(w)$ este ca să existe $B_0 = c \in \mathbb{C}, B_1, \dots, B_n \in R$ și B_{n+1} elementară în raport cu R astfel încât:

$$\begin{cases} A_0(z) &= c \cdot p(z) + B'_1(z) \\ A_1(z) &= B_1(z) \cdot p(z) + \frac{1}{2} \cdot B'_2(z) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ A_n(z) &= B_n(z) \cdot p(z) + \frac{1}{n+1} \cdot B'_{n+1}(z). \end{cases}$$

În acest caz

$$\int \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot A_k(z) \cdot w^{n-k}(z) dz = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot B_k(z) \cdot w^{n+1-k}(z).$$

Integrala de mai sus definește o funcție din $R(w)$ dacă și numai dacă $B_{n+1} \in R$.

⊗ **Demonstrație.** Reamintim că, deoarece $w' = p \in R \subseteq R(w)$, cel mai mic corp Liouville care conține R și w este $R(w) = \left\{ \frac{P(w)}{Q(w)} : P, Q \in R(X) \right\}$ (teorema 4.1.9).

Necesitatea. Presupunem că

$$F(w, z) = \int \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot A_k(z) \cdot w^{n-k}(z) dz$$

este elementară în raport cu $R(w)$. Principiul lui Laplace-Liouville ne asigură existența unui număr natural $m \in \mathbb{N}$, a m numere complexe $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ și a $m+1$ funcții $u_0, u_1, \dots, u_m \in R(w)$ așa fel încât

$$F(w, z) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \log(u_k(w, z)) + u_0(w, z).$$

Rezultă atunci că

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{u_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial w} + \frac{\partial u_0}{\partial w}.$$

Deoarece funcțiile u_k sunt raționale în variabila w , $\frac{\partial u_k}{\partial w} \in R(w)$, de unde rezultă că $\frac{\partial F}{\partial w} \in R(w)$. Pe de altă parte

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \cdot A_k(z) \cdot w^{n-k}(z) = \frac{d}{dz} F(w(z), z) = \frac{\partial F}{\partial w} \cdot p + \frac{\partial F}{\partial z}$$

de unde rezultă că $\frac{\partial F}{\partial z} \in R(w)$.

Deoarece w este transcendent peste R următoarea relație este o identitate în w :

$$(1) \quad \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot A_k(z) \cdot w^{n-k} = \frac{\partial F}{\partial w}(w, z) \cdot p(z) + \frac{\partial F}{\partial z}(w, z).$$

Deci

$$(2) \quad \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot A_k(z) \cdot w^{n-k}(z) \equiv_w \frac{d}{dz} F(w(z), z).$$

În relația (2) înlocuim w cu $w + \gamma$ și obținem

$$(3) \quad \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot A_k(z) \cdot (w + \gamma)^{n-k} = \frac{d}{dz} F(w + \gamma, z), \forall \gamma \in \mathbb{C}.$$

Integrăm în (3) de la $c_0 \in \mathbb{C}$ la $z \in \mathbb{C}$

$$(4) \quad \int_{c_0}^z \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot A_k(z) \cdot [w(z) + \gamma]^{n-k} dz = F(w(z) + \gamma, z) - F(w(c_0) + \gamma, c_0).$$

Notăm $-F(w(c_0) + \gamma, c_0) = c(\gamma)$ și obținem

$$(5) \quad \int_{c_0}^z \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot A_k(z) \cdot [w(z) + \gamma]^{n-k} dz = F(w(z) + \gamma, z) + c(\gamma).$$

Derivând relația (5) de $n - 1$ ori după γ obținem

$$(6) \quad \int_{c_0}^z n! [A_0(z)(w(z) + \gamma) + A_1(z)] dz = F_{w^{n-1}}^{(n-1)}(w + \gamma, z) + c^{(n-1)}(\gamma).$$

În relația (6) facem $\gamma = 0$ și notăm $c^{(n-1)}(0) = c \in \mathbb{C}$.

$$(7) \quad \int_{c_0}^z n! [A_0(z) \cdot w(z) + A_1(z)] dz = F_{w^{n-1}}^{(n-1)}(w, z) + c.$$

Deoarece $F_{w^{n-1}}^{(n-1)} \in R(w)$ rezultă că $\int_{c_0}^z n! [A_0(z) \cdot w(z) + A_1(z)] dz \in R(w)$ și atunci, utilizând rezultatul stabilit în teorema precedentă, există $c \in \mathbb{C}$, există $b_1, b_2 \in R$ așa fel încât

$$A_0(z) = \frac{1}{n!} \cdot c \cdot p(z) + b'_1(z)$$

$$A_1(z) = \frac{1}{n!} \cdot b_1(z) \cdot p(z) + b'_2(z) \text{ și}$$

$$\int_{c_0}^z n! [A_0(z) \cdot w(z) + A_1(z)] dz = \frac{c}{2} \cdot w^2(z) + b_1(z) \cdot w(z) + b_2(z).$$

Deci

$$F_{w^{n-1}}^{(n-1)}(w, z) = \frac{c}{2} \cdot w^2(z) + b_1(z) \cdot w(z) + b_2(z).$$

Dacă ultima relație o integrăm după w obținem

$$F_{w^{n-2}}^{(n-2)}(w, z) = \frac{c}{3!} \cdot w^3(z) + \frac{b_1(z)}{2} \cdot w^2(z) + b_2(z) \cdot w(z) + b_3(z).$$

Deoarece $F_{w^{n-2}}^{(n-2)} \in R(w)$ și w este transcendent peste R relația de mai sus este o identitate și deci, dând lui w o valoare constantă w_0 , obținem $b_3 \in R$; ș.a.m.d.

După $n - 2$ integrări succesive obținem:

$$F'_w(w, z) = \frac{c}{n!} \cdot w^n + \frac{b_1(z)}{(n-1)!} \cdot w^{n-1} + \dots + \frac{b_{n-1}(z)}{1!} \cdot w + b_n(z)$$

și, cu același argument de mai sus, $b_k \in R, \forall k = 1, \dots, n$.

Vom nota acum $B_k = \frac{k!}{n!} \cdot b_k, \forall k = 0, \dots, n$, unde $b_0 = c \in \mathbb{C}$; atunci $B_0, B_1, \dots, B_n \in R$ și

$$(8) \quad F'_w(w, z) = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot B_k(z) \cdot w^{n-k}(z).$$

Dacă integrăm relația (8) încă o dată obținem

$$(9) \quad F(w, z) = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot B_k(z) \cdot \frac{1}{n-k+1} \cdot w^{n-k+1}(z) + \frac{1}{n+1} \cdot B_{n+1}(z) = \\ = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot B_k(z) \cdot w^{n+1-k}(z).$$

Din relația (9), $B_{n+1} = \Phi(w, \cdot)$, unde

$$\Phi(w, z) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \log(u_k(w, z)) + u_0(w, z) - \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot B_k(z) \cdot w^{n+1-k}(z).$$

Deoarece $\Phi'_w \equiv 0$ (relația (8) este o identitate în w), $\Phi(w, z) = \Phi(w_0, z)$ de unde rezultă că

$$B_{n+1}(z) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \log(u_k(w_0, z)) + u_0(w_0, z) - \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot B_k(z) \cdot w_0^{n+1-k}(z),$$

ceea ce arată că B_{n+1} este elementară în raport cu R .

Din (9) rezultă

$$\int \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot A_k(z) \cdot w^{n-k} dz = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot B_k(z) \cdot w^{n+1-k}.$$

Derivăm relația de mai sus după z și obținem

$$(10) \quad \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot A_k(z) \cdot w^{n-k} = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot B'_k(z) \cdot w^{n+1-k} + \\ + \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n C_{n+1}^k \cdot B_k(z) \cdot (n+1-k) \cdot w^{n-k} \cdot p(z).$$

Relația (10) este o identitate în w și deci putem identifica coeficienții puterilor egale ale lui w din cei doi membri; se obține:

$$\begin{aligned} B'_0 &= 0, \\ C_n^0 \cdot A_0 &= \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^1 \cdot B'_1 + C_{n+1}^0 \cdot B_0 \cdot (n+1) \cdot p) \\ \dots &\dots \\ C_n^{n-1} \cdot A_{n-1} &= \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^n \cdot B'_n + C_{n+1}^{n-1} \cdot B_{n-1} \cdot 2 \cdot p) \\ C_n^n \cdot A_n &= \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^{n+1} \cdot B'_{n+1} + C_{n+1}^n \cdot B_n \cdot p) \end{aligned}$$

Din relațiile de mai sus rezultă imediat condițiile cerute în teoremă.

Se poate ușor remarca din demonstrația de mai sus că $F(w, \cdot) \in R(w)$ dacă și numai dacă $B_{n+1} \in R$.

Suficiența. Presupunem că există $n \in \mathbb{N}$, există $c = B_0 \in \mathbb{C}$, $B_1, \dots, B_n \in R$ și B_{n+1} elementară în raport cu R așa fel încât, pentru orice $k = 0, \dots, n$,

$$A_k = B_k \cdot p + \frac{1}{k+1} \cdot B'_{k+1}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} F(w, z) &= \int \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot A_k(z) \cdot w^{n-k} dz = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \int \left(B_k(z) \cdot p(z) + \frac{1}{k+1} \cdot B'_{k+1}(z) \right) \cdot w^{n-k} dz = \\ &= \frac{c}{n+1} \cdot w^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_n^k \cdot \int B_k(z) \cdot p(z) \cdot w^{n-k} dz + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \cdot \frac{1}{k} \cdot \int B'_k(z) \cdot w^{n+1-k} dz = \frac{c}{n+1} \cdot w^{n+1} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left(C_n^k \cdot \int B_k(z) \cdot p(z) \cdot w^{n-k} dz + \frac{1}{n+1} \cdot C_{n+1}^k \cdot \int B'_k(z) \cdot w^{n+1-k} dz \right) + \\ &\quad + \frac{1}{n+1} \cdot B_{n+1}(z) = \frac{c}{n+1} \cdot w^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(C_n^k \cdot \int B_k(z) \cdot p(z) \cdot w^{n-k} dz + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n+1} \cdot C_{n+1}^k \cdot B_k(z) \cdot w^{n+1-k} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{n+1-k}{n+1} \cdot C_{n+1}^k \cdot \int B_k(z) \cdot p(z) \cdot w^{n-k} dz \Big) + \frac{1}{n+1} \cdot B_{n+1}(z) = \\
& = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot B_k(z) \cdot w^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Se observă că $F(w, \cdot)$ este elementară în raport cu $R(w)$. ■

4.3.4 Exemplu. Să considerăm integrala

$$\int \left(z^2 \cdot w^2 + \frac{z}{z+1} \right) dz.$$

Dacă notăm cu $A_0(z) = z^2$, $A_1(z) = 0$ și $A_2(z) = \frac{z}{z+1}$, atunci funcțiile A_0, A_1 și A_2 aparțin corpului R al funcțiilor raționale. Să presupunem că $w(z) = \log z$; w este o transcendentă peste R . Relațiile din teorema precedentă se scriu în cazul nostru:

$$\begin{aligned}
z^2 &= \frac{c}{z} + B_1'(z) \\
0 &= \frac{B_1(z)}{z} + \frac{1}{2} \cdot B_2'(z) \\
\frac{z}{z+1} &= \frac{B_2(z)}{z} + \frac{1}{3} \cdot B_3'(z).
\end{aligned}$$

Deducem din relațiile de mai sus:

$$\begin{aligned}
c &= 0 \\
B_1(z) &= \frac{z^3}{3} \\
B_2(z) &= -\frac{2z^3}{9} \\
B_3(z) &= 3z + \frac{2}{9}z^3 - 3\log(z+1).
\end{aligned}$$

Se observă că $B_0, B_1, B_2 \in R$ iar B_3 este elementar față de R . Rezultă că integrala este elementară față de $R(w)$ și că

$$\int \left(z^2 \cdot w^2 + \frac{z}{z+1} \right) dz = \frac{1}{3} \cdot z^3 \cdot \log^2 z - \frac{2}{9} \cdot z^3 \cdot \log z - \log(z+1) + z + \frac{2}{27} \cdot z^3.$$

Remarcăm că integrala nu aparține lui $R(w)$.

Bibliografie

- [He] Héck A. - *Introduction to Maple* , Second edition, Springer - Verlag, New-York, Heidelberg,Berlin, 1997.
- [Os] Ostrowski M.A. - *Sur l 'intégrabilité élémentaire de quelques classes d 'expressions* , Commentarii Mathematici Helvetici, 18 (1945-1946), 283-308.
- [Ri] Risch R.H. - *The Problem of Integration in Finite Terms* , Transactions of the American Mathematical Society, 139(1969), 167-189.